examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

Nu bij je boek
mijn.examenbundel.nl
Online oefenen, video's en meer

2021|2022

VWO

Wiskunde B

ThiemeMeulenhoff

examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

2021 | 2022

N.C. Keemink
P. Thiel

vwo

Wiskunde B

ThiemeMeulenhoff

mijn.examenbundel.nl

Slagen zonder examenstress doe je met Examenbundel, Samengevat, Examenidioom en Zeker Slagen!
Alles voor je schoolexamens en je centrale examens in je boeken, maar ook online.

Quickscan

Antwoorden bij de oriëntatietoets

Video's en andere leerbronnen

Oefenexamens

Overzicht van al je examenvakken

En nog veel meer op Mijn Examenbundel!

Ga naar mijn.examenbundel.nl en log in op Mijn Examenbundel. Met deze code krijg je toegang tot heel veel (digitale) extra's die bij je bundel horen:

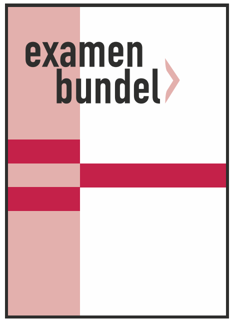
Deze code is uniek en door één persoon te gebruiken. Geldig tot 15 juli 2022.

#ikgazekerslagen

Voorwoord

Met deze **Examenbundel** bereid je je goed voor op het eindexamen en op de schoolexamens. Je oefent met echte examenopgaven. Als je niet weet hoe je een vraag aan moet pakken, raadpleeg dan de bijbehorende hint. In de uitwerkingen staan de antwoorden met een duidelijke uitleg. Zo weet je precies wat je goed en fout hebt gedaan.

Gebruik naast deze **Examenbundel** ook het boek **Samengevat** om te leren voor je examen. Hierin vind je een handige samenvatting van alle examenstof.



Oefenen met echte examens en duidelijke uitwerkingen

+

Overzichtelijke samenvatting van de examenstof

Wil je weten op welke datum het centraal examen is?
Ga naar examenbundel.nl/examenrooster voor het actuele examenrooster.
Of scan de QR-code:

Namens team **Examenbundel** heel veel succes!

Heb je een vraag of opmerking over deze **Examenbundel**?
Ga dan naar examenbundel.nl/contact.

Opmerking
De overheid stelt de regels op voor het examen. Bijvoorbeeld wat de examenonderwerpen zijn, welke hulpmiddelen je mag gebruiken en wanneer het examen is. De auteurs en uitgever hebben deze **Examenbundel** met grote zorg samengesteld. Soms veranderen de regels van de overheid echter of worden er nieuwe afspraken gemaakt over wat die regels betekenen. Raadpleeg daarom altijd je docent of onze website www.examenbundel.nl voor actuele informatie die voor jouw examen van belang is.

©ThiemeMeulenhoff

Inhoud

3 **Voorwoord**
7 **Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?**
13 **Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?**

Oriëntatietoets

17 Opgaven

Deel 1
Oefenen op onderwerp

1 Algebraïsche vaardigheden
25 Opgaven
32 Hints - uitwerkingen

2 Functies (lineair-, machts-, wortel- en gebroken functies)
42 Opgaven
57 Hints - uitwerkingen

3 Exponentiële en logaritmische functies
73 Opgaven
85 Hints - uitwerkingen

4 Periodieke functies
102 Opgaven
112 Hints - uitwerkingen

5 Meetkunde
124 Opgaven
131 Hints - uitwerkingen

Deel 2a
Examens met uitwerkingen

Examen 2016-I (pilot)
147 Opgaven
157 Hints - uitwerkingen

Examen 2016-II (pilot)
167 Opgaven
177 Hints - uitwerkingen

Examen 2017-I (pilot)
186 Opgaven
193 Hints - uitwerkingen

Examen 2017-II (pilot)
203 Opgaven
213 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-I
224 Opgaven
233 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-II
243 Opgaven
250 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-I
262 Opgaven
270 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-II
283 Opgaven
298 Hints - uitwerkingen

Deel 2b
Examen zonder uitwerkingen

Examen 2021-I
311 opgaven

Bijlagen

Cijferbepaling
Onderwerpregister
Examenwerkwoorden
Formuleblad
Afrondregels

©ThiemeMeulenhoff

Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?

Natuurlijk kun je de **Examenbundel** van voor naar achter doorwerken of er kriskras wat onderdelen uithalen om mee te oefenen, maar je kunt het ook systematischer aanpakken. Als je oefenen met de **Examenbundel** combineert met leren uit **Samengevat**, bereid je je optimaal voor op je examen.

Op de volgende pagina's vind je drie routes die laten zien hoe je kunt leren met de **Examenbundel**. Kies de route die past bij jouw manier van leren:

- Route 1: Ga je graag meteen aan de slag? Start met **oefenen per onderwerp**.
- Route 2: Wil je eerst weten waar je staat? Start met **de oriëntatietoets**.
- Route 3: Leer je liever eerst de theorie? Start met **leren per onderwerp**.

Wil je weten wat je leerstijl is?

Kies de route die bij jouw manier van leren past!

Lees ook de tips! Voorkom verrassingen tijdens je examen.

#ikgazekerslagen

Route 1

Ga je graag meteen aan de slag? Start met oefenen per onderwerp.

januari & februari

- Maak per week opgaven van een hoofdstuk in deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
  - De helft of minder goed.
    - Neem het bijbehorende hoofdstuk in Samengevat door.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints. → Maak de oriëntatietoets.

maart

- Maak de oriëntatietoets.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
- Bestudeer Samengevat over de onderwerpen die minder goed gingen.
- Oefen opgaven uit deel 1 van de Examenbundel en via het onderwerpregister uit de verschillende examens over het betreffende onderwerp. Gebruik de hints!

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.
- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat. → Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 2

Wil je eerst weten waar je staat? Start met de oriëntatietoets.

januari

- Maak de oriëntatietoets in de Examenbundel.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
    - Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.

februari

- Bestudeer elk hoofdstuk in Samengevat.

maart

- Maak opgaven per onderwerp uit deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed.
  - De helft of minder goed.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints.

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

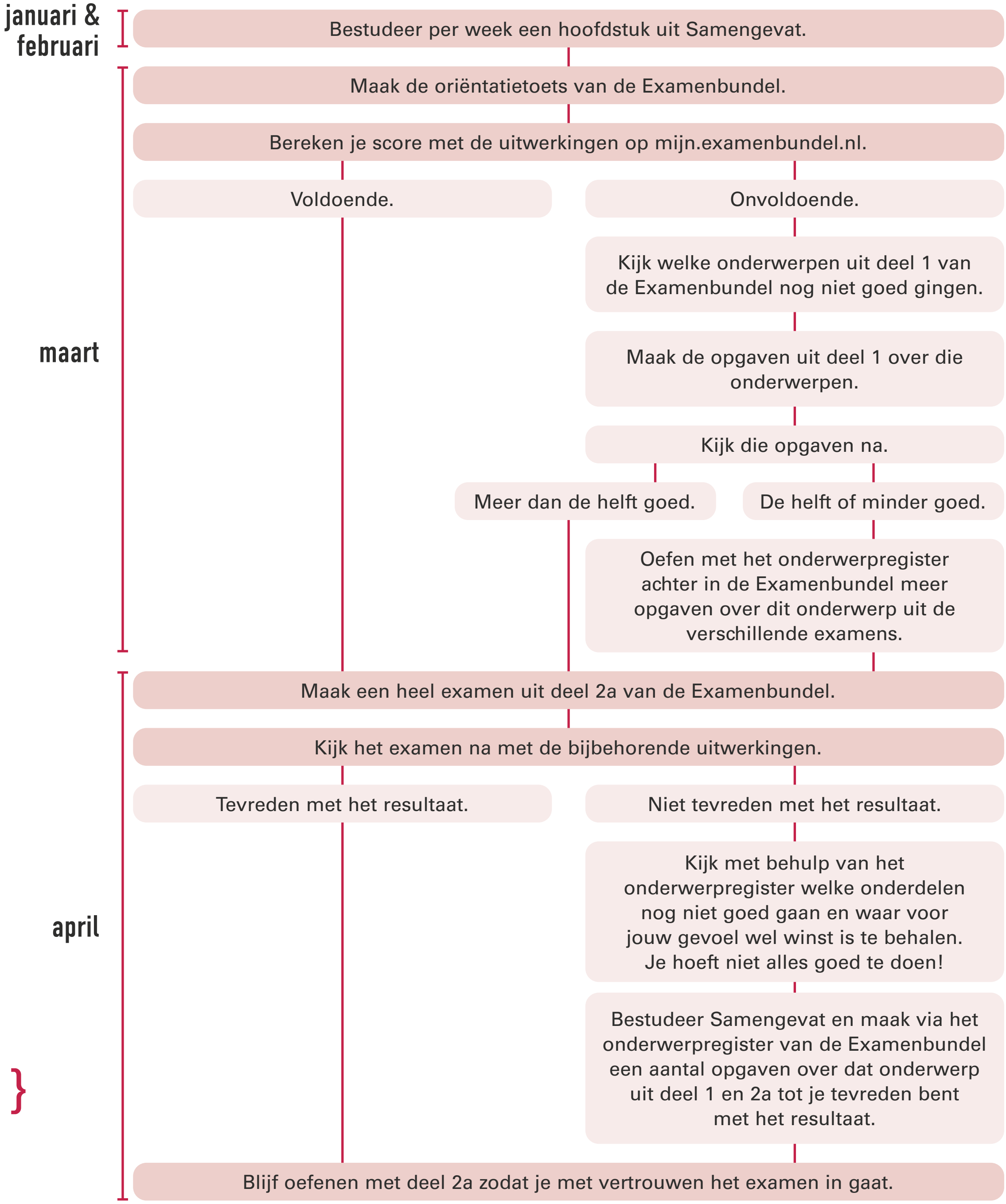
april

- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 3

Leer je liever eerst de theorie? Start met leren per onderwerp.



#geenexamenstress

Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?

Bij het op de juiste manier oplossen van een probleem doorloop je in het algemeen drie stappen: de voorbereiding, de uitvoering en een controle.

Voorbereiding

- Kijk eerst vluchtig alle opgaven door en begin met de opgaven die je vertrouwd voorkomen.
- Ga na hoeveel tijd beschikbaar is per opgave.
- Lees de tekst van de gekozen opgave rustig en nauwkeurig. Onderstreep of markeer hierbij aanwijzingen, begrippen, formules, getallen e.d. die van belang kunnen zijn. Deze informatie is dan bij het beantwoorden van de vragen snel terug te vinden.
- Lees elke vraag nauwkeurig, maak een schets en ga na welke informatie je nodig denkt te hebben om de vraag te kunnen beantwoorden.
- Als in een vraag staat ‘los op, benader of bereken’ dan mag de grafische rekenmachine gebruikt worden om het antwoord te vinden. Als in een vraag staat ‘bereken algebraïsch of bereken exact’ dan wordt er naar een berekening gevraagd. De grafische rekenmachine gebruik je dan alleen ter controle.
- Bepaal welke tussenstappen je bij de beantwoording van de vraag zult moeten maken. Deze worden bepaald door het ‘gat’ dat er zit tussen de gegevens en het gevraagde. Je kunt daarbij zowel van de gegevens als van het gevraagde uitgaan.
- Begin pas aan de uitvoering, wanneer je de aanpak van het vraagstuk overziet.

Uitvoering

- Reserveer op je papier voor elke opgave voldoende ruimte. Je werk wordt daardoor overzichtelijker en je kunt je antwoord makkelijker aanvullen.
- Schrijf alle tussenstappen overzichtelijk op, zodat zichtbaar wordt hoe je tot je antwoord bent gekomen.
- Indien om uitleg wordt gevraagd, mag die niet ontbreken.
- Schrijf bij twijfel altijd iets op (behalve als je zelf al kunt beoordelen dat je antwoord nergens op slaat).

Controle

- Lees de vraag nog eens over. Is hij volledig beantwoord?
- Vind je het gevonden antwoord zinnig (klopt bv. de orde van grootte)? Zo niet, probeer je denk- of rekenfout op te sporen of maak daarover tenminste een opmerking.
- Is de juiste eenheid vermeld?
- Is de afronding van een verkregen waarde in overeenstemming met de vraagstelling? Let op het juiste aantal cijfers achter de komma.

Hoe zou je het nu al doen op een examen? De oriëntatietoets geeft je een eerste indruk. De antwoorden vind je op mijn.examenbundel.nl.

Oriëntatietoets

Oriëntatietoets

Twee lijnen

Gegeven zijn de lijn m met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

de lijn n met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3p **1** Bereken de hoek tussen m en n. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

Een gebroken functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{4e^x + 8}{e^x + 4}$.

3p **2** Bereken exact voor welk x geldt: $f(x) > 3$

$F(x) = 2x + 2 \cdot \ln(e^x + 4)$ is een primitieve van f.

3p **3** Toon dit aan.

Hardheid

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. De grafiek van f is een halve cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 5.

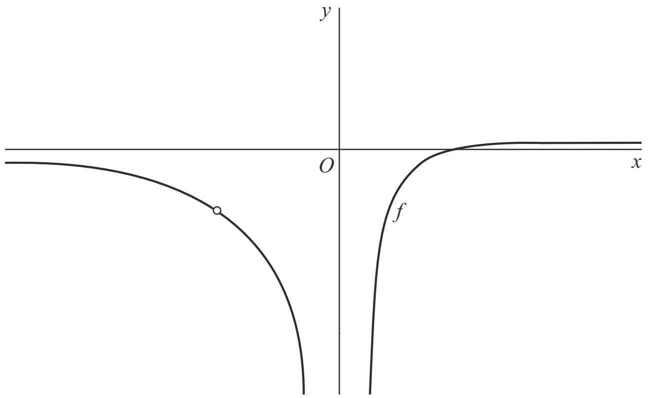
Voor de functie f geldt: $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \dfrac{5}{\sqrt{25 - x^2}}$

5p **4** Bewijs dit.

Raaklijn en perforatie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2}$ met $x \neq -2$ en $x \neq 0$.

figuur



3p **5** Bepaal met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan f in het snijpunt van f met de x-as.

De grafiek van f heeft een perforatie. In de figuur is de grafiek van f met de perforatie getekend.

3p **6** Bepaal met behulp van limieten de perforatie van de grafiek van f.

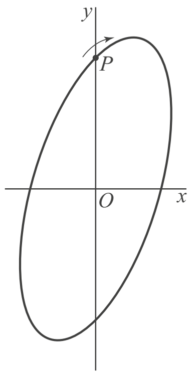
Een ellipsvormige baan

Punt P doorloopt in het Oxy-vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin(t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.
De baan van P is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Gedurende de beweging verandert de afstand van P tot de oorsprong.

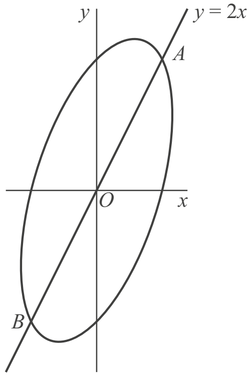
3p **7** Bereken de maximale afstand van P tot de oorsprong. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

4p **8** Bereken exact de snelheid van P als $t = 0$.

De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B. Zie figuur 2.

6p **9** Bereken exact de coördinaten van A en B.

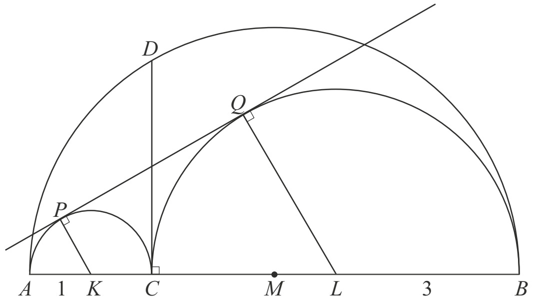
figuur 2



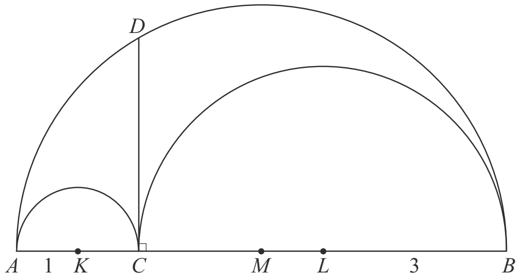
Drie halve cirkels

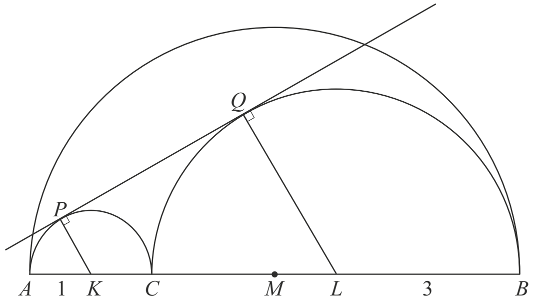
Gegeven is een halve cirkel met middellijn *AB* en straal 4. Het middelpunt van deze cirkel is *M*.
Op lijnstuk *AB* ligt het punt *C* zo dat $AC = 2$.
AC en *CB* zijn de middellijnen van twee andere halve cirkels met stralen 1 en 3.
De middelpunten van deze twee halve cirkels zijn respectievelijk *K* en *L*.
Alle halve cirkels liggen aan dezelfde kant van *AB*.
De lijn door *C* loodrecht op *AB* snijdt de grootste halve cirkel in punt *D*.
Lijn *PQ* is de gemeenschappelijke raaklijn aan de twee binnenste halve cirkels, waarbij *P* en *Q* de raakpunten zijn. *PQ* staat dus loodrecht op *KP* en op *LQ*.
Zie figuur 1.

figuur 1



5p **10** Toon aan dat *CD* en *PQ* exact even lang zijn. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuren hieronder.





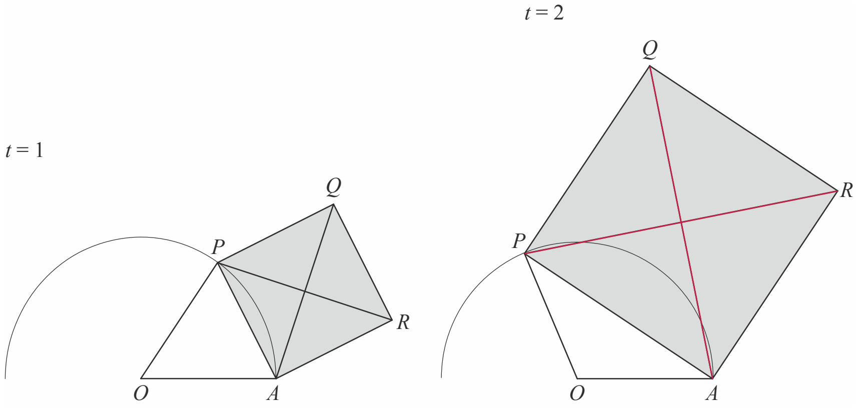
Vierkant op een driehoek

Gegeven zijn de punten $O(0,\ 0)$ en $A(2,\ 0)$.
Punt *P* beweegt over de halve cirkel met middelpunt *O* en straal 2 volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 < t < \pi$$

Tegen de zijde *AP* van driehoek *OAP* ligt een vierkant *ARQP*. Dit vierkant ligt buiten driehoek *OAP*.
In de figuur is de situatie op de tijdstippen $t = 1$ en $t = 2$ weergegeven.

figuur



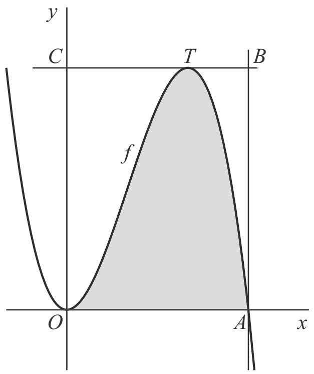
Er geldt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 2\sin(t) \\ -2\cos(t) + 2\sin(t) + 2 \end{pmatrix}$

3p **11** Bewijs dit.

Onafhankelijk van *p*

Voor elke positieve waarde van p is een functie f gegeven door $f(x) = -x^3 + 3px^2$.
De grafiek van f heeft twee punten met de x-as gemeenschappelijk: $O(0, 0)$ en punt A. Zie onderstaande figuur.
De top van de grafiek van f die rechts van de y-as ligt, noemen we T.
De horizontale lijn door T snijdt de y-as in punt C en snijdt de verticale lijn door A in punt B. De oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f binnen rechthoek $OABC$ is in de figuur grijs gemaakt.

figuur



8p **12** Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van het grijze gebied en de oppervlakte van rechthoek $OABC$ onafhankelijk is van p.

Vermenigvuldigen in horizontale en verticale richting

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

Voor elke waarde van c is de functie g_c gegeven door $g_c(x) = \frac{c + \ln(x)}{x}$.

De grafiek van f wordt ten opzichte van de x-as vermenigvuldigd met e, het grondtal van de natuurlijke logaritme. Vervolgens wordt de zo verkregen grafiek ten opzichte van de y-as vermenigvuldigd met $\frac{1}{e}$.

Hierdoor ontstaat de grafiek van g_c voor een waarde van c.
4p **13** Bereken exact deze waarde van c.

 ©ThiemeMeulenhoff

Examenopgaven per onderwerp met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de antwoorden. Ook handig bij de voorbereiding op je schoolexamens!

Deel 1 Oefenen op onderwerp

1 Algebraïsche vaardigheden

Herschrijf tot de vorm A =

1 $\dfrac{2q}{5q+2} = \dfrac{A}{2A-3}$

2 $t = \dfrac{5 \cdot P \cdot d}{\frac{1}{2}A}$

3 $V = 87 - \dfrac{20}{A + 0{,}05}$

4 $\dfrac{a}{b} \cdot \mathrm{A} = \dfrac{c}{d}$

5 $\dfrac{1300 - A}{A} = 44 \cdot 0{,}87^t$

6 $t = 6{,}9\sqrt{A - 12}$

7 $\dfrac{A}{\sqrt{b^2 + 9}} = \dfrac{b+1}{A}$

8 $t = 10 \cdot \log(A) + 90$

9 $\log(A) = 2 \cdot \log(D) + c$

10 $P = 100 \cdot (1 - 2^{-cA})$

11 $C = \dfrac{1{,}2 \cdot A^{3{,}4}}{B}$

12 $\dfrac{1300 - t}{t} = 44 \cdot 0{,}87^A$

Herschrijf de stelsels tot de vorm $A(r)$ = en herleid zo ver mogelijk

13 $\begin{cases} A = \dfrac{1000}{x^3} \\ x = \sqrt{100 + r^2} \end{cases}$

14 $\begin{cases} A = B^3 \\ r = 6B^2 \end{cases} \qquad B > 0$

15 $\begin{cases} B \cdot r = 30 \\ A = \dfrac{18547}{B} + 56{,}6B + \dfrac{5279}{r} + 90{,}8r \end{cases}$

©ThiemeMeulenhoff

Bereken algebraïsch de oplossing van onderstaande vergelijkingen

16 $x + \sqrt{8 + x} = 4$

17 $x\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{x + 1} = 0$

18 $\frac{(4x - 1)\cdot 3 - (3x + 1)\cdot(2x - 1)}{(x + 1)^2} = 0$

19 $(4x^2 - 8)^3(2x + 1) = 0$

20 $2000\cdot x^{-2} - 40000\cdot x^{-3} = 0$

Bereken algebraïsch de waarde van *a* en *b*

21 $\begin{cases} a - b = 178 \\ a - 0{,}36b = 205 \end{cases}$

22 $\frac{3x + 7}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x + 3}$

Werk de haakjes weg en herleid zo ver mogelijk

23 $(30 - 2x^3)^2 =$

24 $a\cdot\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - a\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 =$

25 $11000\cdot 0{,}9^t\cdot\left(0{,}7 - 0{,}5\cdot 0{,}9^{2t}\right) =$

26 $0{,}007\,(8G)^{0{,}425}\cdot(2L)^{0{,}725} =$

Herschrijf tot de gevraagde vorm

27 Schrijf $\left(6{,}9 + \frac{298{,}5}{\frac{L}{T}\cdot 3600}\right)\cdot L$ om tot de vorm $aL + bT$

28 Schrijf zonder quotiënt: $\frac{2q^2 - 8q + 16}{q} =$

29 Schrijf om tot één quotiënt: $\frac{3000}{t}\cdot\left(1 - \frac{1}{t}\right) =$

30 Schrijf om tot één quotiënt: $\sqrt{1 - x^2} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} =$

31 Schrijf om tot één quotiënt: $\sqrt{1 - x} + \frac{x}{\sqrt{1 - x}} =$

32 Schrijf om tot één quotiënt: $\frac{60v}{\frac{v^2}{2a} + k}$

33 Schrijf $\sqrt[3]{1000x}$ om tot de vorm $a\cdot x^b$

34 Schrijf $\log(y) = 3 + 4x$ om tot de vorm $y = 10^a\cdot\left(10^b\right)^x$

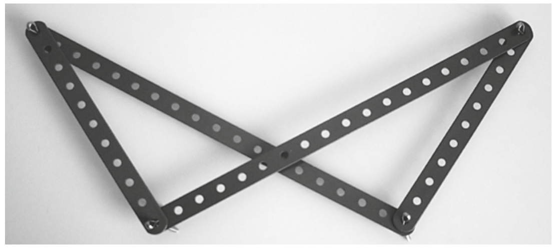
35 Schrijf $x^2 + 8x + 15$ om tot de vorm $(x + p)^2 + q$

36 Schrijf $x^2 - 3x + 12$ om tot de vorm $(x + p)^2 + q$

Stangenvlinders

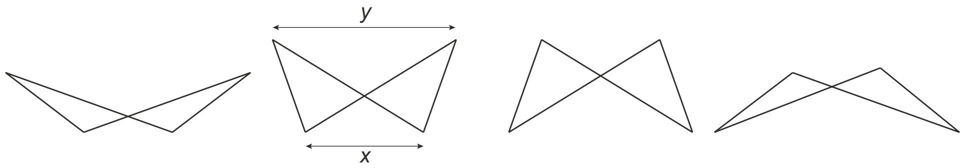
Een constructie bestaat uit twee stangen van lengte 18 cm en twee stangen van lengte 10 cm die scharnierend aan elkaar zijn bevestigd. Zie de foto.
We verwaarlozen de breedte en de dikte van de stangen en bekijken alleen de vormen waarbij de lange stangen over elkaar heen liggen.

foto



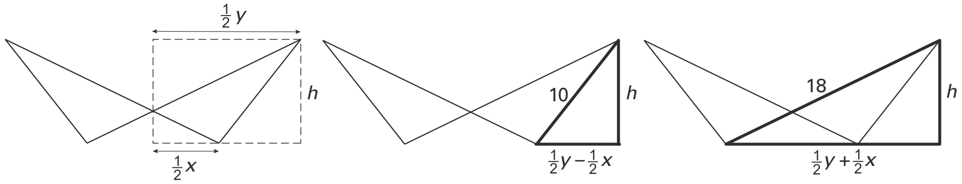
In figuur 1 hieronder zie je een aantal mogelijke vormen getekend; zulke vormen noemen we stangenvlinders.
De afstand tussen de scharnierpunten aan de onderkant noemen we x, die aan de bovenkant y, met x en y in cm.
Als x maximaal is, en dus y minimaal, liggen de vier lijnstukken op één lijn. In die situatie zijn x en y achtereenvolgens 28 en 8.

figuur 1



In figuur 2 zijn bij een stangenvlinder met hoogte h twee rechthoekige driehoeken getekend.

figuur 2

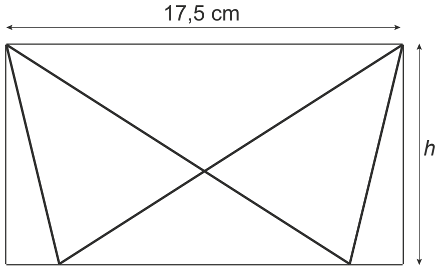


Door in elk van de vet getekende driehoeken h^2 uit te drukken in x en y kun je afleiden dat $y = \dfrac{224}{x}$.

37 Geef deze afleiding.

De stangenvlinder past precies op de rechthoekige bodem van een doosje met lengte 17,5 cm, zoals getekend in figuur 3.

figuur 3

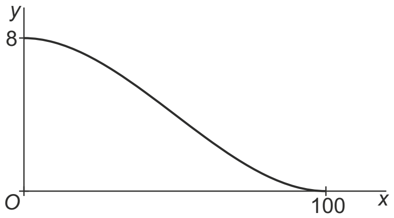


38 Bereken de breedte h van de bodem van dit doosje.

Landing

In deze opgave bekijken we een eenvoudig wiskundig model van de baan van een vliegtuig bij de landing.
Een vliegtuig vliegt op een hoogte van 8 km. Op een afstand van 100 km van het vliegveld (horizontaal gemeten) wordt het landingsproces ingezet.
We tekenen de baan van het vliegtuig in een assenstelsel: x is de afstand (in km, horizontaal gemeten) vanaf het punt waar het landingsproces wordt ingezet en y is de hoogte (in km).
De piloot begint het landingsproces in het punt (0, 8) en het vliegtuig komt in het punt (100, 0) op de grond. Zie figuur 4.

figuur 4



De baan die het vliegtuig tijdens het landingsproces beschrijft, wordt in het assenstelsel bij benadering gegeven door: $y = 8 - 2{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot x^3$

39 Toon langs algebraïsche weg aan dat volgens bovenstaande formule het vliegtuig zowel in het punt (0, 8) als in het punt (100, 0) een horizontale bewegingsrichting heeft.

De snelheid in horizontale richting is tijdens het gehele landingsproces 500 km/u.
Er geldt dus: $x = 500t$, waarbij t het aantal uren na het inzetten van de landing is en $0 \le t \le 0{,}2$.

Voor de hoogte y geldt: $y = 8 - 600 \cdot t^2 + 2000 \cdot t^3$.

40 Bewijs dat deze formule klopt.

Om veiligheidsredenen mag de absolute waarde van de verticale versnelling $y''(t)$ tijdens het landingsproces niet groter zijn dan 1200 km/u^2.

41 Onderzoek of aan deze eis voldaan is.

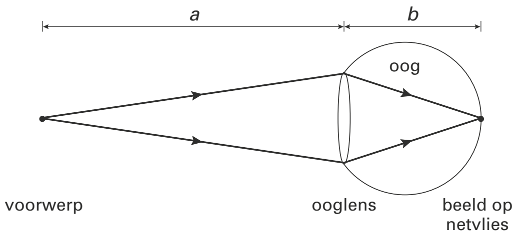
Het menselijk oog

Om een voorwerp op verschillende afstanden scherp te kunnen zien heeft de mens de mogelijkheid om te accommoderen, dat wil zeggen de sterkte van zijn ogen aan te passen, zodat er een scherp beeld op zijn netvlies komt. Om een voorwerp op een afstand *a* van het oog scherp te kunnen zien is een bepaalde sterkte *S* van het oog nodig. Voor deze sterkte *S* gebruiken we het volgende model: $S = \frac{a + b}{a \cdot b}$.

Hierbij is:
- *a* de afstand in meters tussen het voorwerp en de ooglens;
- *b* de afstand in meters tussen het netvlies en de ooglens;
- *S* de sterkte in dioptrieën (dpt).

Zie figuur 5.

figuur 5



De afstand *b* hoeft niet voor beide ogen gelijk te zijn.

Iemand heeft een rechteroog met $b = 0{,}018$ m. Hij kan de sterkte van zijn rechteroog variëren van 58 tot en met 63 dpt.

42 Bereken op welke afstanden dit rechteroog voorwerpen scherp kan zien. Rond de grenswaarden in je antwoord af op twee decimalen.

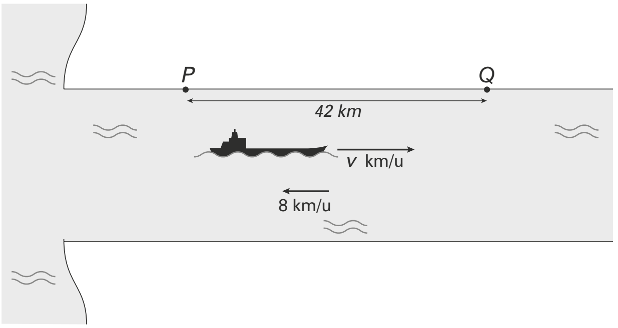
Voor zijn linkeroog geldt: $b = 0{,}017$ m.
Hiermee kan hij voorwerpen op afstanden van 15 cm en verder scherp zien.
43 Bereken welke waarden *S* kan aannemen. Geef je antwoord in gehele dioptrieën.

 ©ThiemeMeulenhoff

Brandstofverbruik

Een schip maakt een tocht over een rivier van *P* naar *Q* en terug. De afstand tussen *P* en *Q* is 42 km. Van *P* naar *Q* vaart het schip tegen de stroom in (stroomopwaarts); op de terugreis vaart het met de stroom mee (stroomafwaarts).
De snelheid van het schip ten opzichte van de wal hangt af van de stroomsnelheid van het water en van de snelheid *v* van het schip ten opzichte van het water; hierbij is *v* in km/u.
De stroomsnelheid van het water is 8 km/u. Zie figuur 6, waarin de tocht van *P* naar *Q* is weergegeven.

figuur 6



Veronderstel: $v = 20$.
44 Toon aan dat de tocht van *P* naar *Q* en terug dan 5 uur duurt.

Het brandstofverbruik *B* op het deel van de tocht stroomopwaarts hangt af van de vaartijd *T* (in uren) en van de snelheid *v* (in km/u) van het schip ten opzichte van het water. Er geldt: $B = T \cdot v^3$.

Voor het deel van de tocht stroomopwaarts geldt: $B = \frac{42v^3}{v - 8}$.

45 Bewijs deze laatste formule.

46 Bereken algebraïsch bij welke waarde van *v* het brandstofverbruik minimaal is voor het deel van de tocht stroomopwaarts.

©ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 1

1 Werk eerst het quotiënt weg.

2 Kruislings vermenigvuldigen.

3 Werk eerst de 87 weg en daarna het quotiënt.

4 Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van deze breuk.

5 Werk eerst het quotiënt weg en zet daarna A aan één kant van het = teken.

6 Werk de 6,9 weg zodat je (makkelijker) kan kwadrateren.

7 Werk de quotiënten weg.

8 Herleid eerst op log(A). Maak gebruik van $\log(a) = b$ dus $a = 10^b$

9 Ga na hoe log(A) herschreven wordt tot $A = \ldots$. Bedenk dat $10^{\log(D)} = D$

10 Werk eerst de 100 en de 1 weg.

11 Ga na hoe de 3,4 wordt weggewerkt. Maak gebruik van $a^b = c$ dus $a = c^{\left(\frac{1}{b}\right)}$

12 Maak gebruik van $a^b = c$ dus $a = c^{\left(\frac{1}{b}\right)}$

13 Werk r om naar r^3.

14 Werk r^2 om naar r^3.

15 Herschrijf de formule $B \cdot r = 30$ tot $B = \ldots$ en vul deze bij A in.

16 Isoleer het wortelteken om daarna te kwadrateren, vergeet niet te controleren.

17 Verdeel de worteltekens over beide zijden van het = teken om daarna te kwadrateren.

18 Welke vergelijking moet opgelost worden? Werk daarna de haakjes weg.

19 Niet de haakjes wegwerken.

20 Werk eerst de x^{-2} en de x^{-3} weg.

21 Herleid de bovenste regel op a en vul die in, in de onderste regel.

22 Herschrijf de breuk achter het = teken eerst tot één breuk door de noemers gelijk te maken.

23 Schrijf eerst met twee paren haakjes.

24 Werk eerst de twee kwadraten uit. Let op de min.

25 Werk de haakjes weg. Wordt er vermenigvuldigd met $0{,}9t$ of met $11\,000 \cdot 0{,}9t$?

26 Werk eerst de haakjes weg.

27 Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van deze breuk.

28 Werk eerst om tot drie kleinere quotiënten.

29 Werk de haakjes weg en maak gelijke noemers.

30 Maak van de eerste term een quotiënt met gelijke noemer.

31 Maak van de eerste term een quotiënt met gelijke noemer.

32 Teller en noemer met hetzelfde ($2a$) vermenigvuldigen.

33 Splits in getallen en x-en.

34 Ga na hoe de log(y) om te werken is tot $y =$

35 Gebruik kwadraat afsplitsen: $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$

36 Gebruik kwadraat afsplitsen: $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$

37 Denk aan de Stelling van Pythagoras. Noteer Pythagoras twee keer, werk uit en ga na wat opvalt.

38 Gebruik het gegeven $y = 17{,}5$ samen met het resultaat van de vorige opgave.

39 Horizontale bewegingsrichting, dus laat zien dat de afgeleide in deze punten 0 is.

40 Substitueer $x = 500t$ in de formule die al eerder gegeven is.

41 Bepaal eerst y'. Bedenk dat het gaat om de absolute waarde.

42 Ga na welke twee vergelijkingen opgelost moeten worden.

43 Bereken S voor $a = 0{,}15$ en $b = 0{,}017$. Bedenk wat er met S gebeurt als a heel groot wordt.

44 Bereken tijd heenweg en tijd terugweg.

45 Bepaal de benodigde vaartijd met vaartijd = afstand : snelheid.

46 Algebraïsch het minimum berekenen, dus afgeleide gelijk stellen aan 0. Gebruik de quotiëntregel.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 1

Herschrijf tot de vorm: *A* =

1 $\frac{2q}{5q+2} = \frac{A}{2A-3}$ dus $2q \cdot (2A-3) = A \cdot (5q+2)$ dus $4qA - 6q = 5qA + 2A$ dus

$4qA - 5qA - 2A = 6q$ dus $-qA - 2A = 6q$ dus $A(-q-2) = 6q$ dus

$A = \frac{6q}{-q-2}$

of

$\frac{2q}{5q+2} = \frac{A}{2A-3} \Leftrightarrow \frac{5q+2}{2q} = \frac{2A-3}{A} \Leftrightarrow \frac{5q+2}{2q} = \frac{2A}{A} - \frac{3}{A} = 2 - \frac{3}{A}$ dus

$\frac{3}{A} = 2 - \frac{5q+2}{2q} = \frac{4q}{2q} - \frac{5q+2}{2q} = \frac{-q-2}{2q}$ dus $\frac{3}{A} = \frac{-q-2}{2q} \Leftrightarrow \frac{A}{3} = \frac{2q}{-q-2} \Leftrightarrow A = \frac{6q}{-q-2}$

2 *Ga na in welke stappen het gedeelte dat P bevat, opgebouwd is. Werk deze stappen in omgekeerde volgorde weg. (Werk dus eerst het quotiënt weg.)*

$t = \frac{5 \cdot P \cdot d}{\frac{1}{2}A}$ dus $\frac{t}{1} = \frac{5 \cdot P \cdot d}{\frac{1}{2}A}$ kruislings vermenigvuldigen geeft

$\frac{1}{2}A \cdot t = 5 \cdot P \cdot d$ en $A = \frac{10 \cdot P \cdot d}{t}$

3 *Ga na in welke stappen het gedeelte dat A bevat, opgebouwd is. Werk deze stappen in omgekeerde volgorde weg. (Werk eerst de 87 weg en daarna het quotiënt.)*

$V = 87 - \frac{20}{A+0{,}05}$

$V - 87 = -\frac{20}{A+0{,}05}$ dus $\frac{V-87}{1} = \frac{-20}{A+0{,}05}$ kruislings vermenigvuldigen

$(A + 0{,}05)(V - 87) = -20$

$A + 0{,}05 = -\frac{20}{V-87}$

$A = -0{,}05 - \frac{20}{V-87}$ dit kan ook geschreven worden als $A = \frac{20}{87-V} - 0{,}05$

4 *Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde.*

$\frac{a}{b} \cdot A = \frac{c}{d}$

$A = \frac{\left(\frac{c}{d}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c \cdot b}{d \cdot a}$

5 *Werk eerst quotiënt weg en zet daarna A aan één kant van het = teken.*

$\frac{1300-A}{A} = 44 \cdot 0{,}87^t$ dus $\frac{1300-A}{A} = \frac{44 \cdot 0{,}87^t}{1}$

$1300 - A = 44 \cdot 0{,}87^t \cdot A$
$44 \cdot 0{,}87^t \cdot A + A = 1300$
$(44 \cdot 0{,}87^t + 1) \cdot A = 1300$

$A = \frac{1300}{(44 \cdot 0{,}87^t + 1)}$

6 *Ga na in welke stappen het gedeelte dat A bevat, opgebouwd is. Werk deze stappen in omgekeerde volgorde weg. (Werk de 6,9 weg zodat je (makkelijker) kan kwadrateren.)*

$t = 6{,}9\sqrt{A-12}$

$\frac{t}{6{,}9} = \sqrt{A-12}$

$\left(\frac{t}{6{,}9}\right)^2 = A - 12$

$A = \left(\frac{t}{6{,}9}\right)^2 + 12$ dit kan ook geschreven worden als $A = \frac{t^2}{47{,}61} + 12 \approx 0{,}021t^2 + 12$

7 *Werk de quotiënten weg.*

$\frac{A}{\sqrt{b^2+9}} = \frac{b+1}{A}$

$A^2 = (b+1) \cdot \sqrt{b^2+9}$

$A = \pm\sqrt{b+1} \cdot \sqrt[4]{b^2+9} = \pm(b+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (b^2+9)^{\frac{1}{4}}$

8 *Ga na in welke stappen het gedeelte dat A bevat, opgebouwd is. Werk deze stappen in omgekeerde volgorde weg. Herleid eerst op log(A).*

$t = 10 \cdot \log(A) + 90$

$\frac{t-90}{10} = \log(A)$ dus $A = 10^{\frac{t-90}{10}}$ dit kan ook geschreven worden als $A = 10^{\frac{t-90}{10}} = \sqrt[10]{10^{t-90}}$

9 *Ga na hoe log(A) herschreven wordt tot A =*
$\log(A) = 2 \cdot \log(D) + c$

$A = 10^{2 \cdot \log(D) + c} = 10^{2 \cdot \log(D)} \cdot 10^c$

$A = \left(10^{\log(D)}\right)^2 \cdot 10^c = D^2 \cdot 10^c$

10 *Ga na in welke stappen het gedeelte dat A bevat, opgebouwd is. Werk deze stappen in omgekeerde volgorde weg. (Werk dus eerst de 100 en de 1 weg.)*
$P = 100 \cdot (1 - 2^{-cA})$

$\frac{P}{100} = 1 - 2^{-cA}$ dus $\frac{P}{100} - 1 = -2^{-cA}$ dus $1 - \frac{P}{100} = 2^{-cA}$

${}^2\log\left(1 - \frac{P}{100}\right) = -c \cdot A$

$A = \frac{-{}^2\log\left(1 - \frac{P}{100}\right)}{c} = \frac{1}{c} \cdot {}^2\log\left(1 - \frac{P}{100}\right)^{-1} = -\frac{1}{c} \cdot {}^2\log(1 - \frac{1}{100}P)$

11 *Ga na in welke stappen het gedeelte dat A bevat, opgebouwd is. Werk deze stappen in omgekeerde volgorde weg. (Ga na hoe de 3,4 wordt weggewerkt.)*

$C = \frac{1{,}2 \cdot A^{3{,}4}}{B}$ dus $B \cdot C = 1{,}2 \cdot A^{3{,}4}$

$A^{3{,}4} = \frac{B \cdot C}{1{,}2}$

$A = \left(\frac{B \cdot C}{1{,}2}\right)^{\left(\frac{1}{3{,}4}\right)}$

dit kan ook geschreven worden als $\left(\frac{5 \cdot B \cdot C}{6}\right)^{\frac{5}{17}} = \sqrt[17]{\left(\frac{5 \cdot B \cdot C}{6}\right)^5} = \sqrt[17]{\left(\frac{3125 \cdot B^5 \cdot C^5}{7776}\right)}$

12 *Werk eerst de 44 weg. Bedenk ook hoe de vergelijking daarna herschreven kan worden tot de vorm A = ... (Ga na hoe de 0,87 wordt weggewerkt.)*

$\frac{1300-t}{t} = 44 \cdot 0{,}87^A$

$\frac{1300-t}{44 \cdot t} = 0{,}87^A$

$A = {}^{0{,}87}\log\left(\frac{1300-t}{44 \cdot t}\right)$

Herschrijf de stelsels tot de vorm $A(r)$ =   en herleid zo ver mogelijk

13 *Herschrijf de tweede formule van x tot x^3 en vul deze in de bovenste formule in.*

$\begin{cases} A = \frac{1000}{x^3} \\ x = \sqrt{100+r^2} \end{cases}$

$A = \frac{1000}{\left(\sqrt{100+r^2}\right)^3} = 1000 \cdot (100+r^2)^{\frac{-3}{2}}$ dus $A = \frac{1000}{(100+r^2) \cdot \sqrt{(100+r^2)}}$

14 *Herschrijf de tweede formule van B^2 tot B^3 en vul deze in de eerste formule in.*

$\begin{cases} A = B^3 \\ r = 6B^2 \end{cases} \quad B > 0$

$B^2 = \frac{r}{6}$ dus $B^3 = \left(\frac{r}{6}\right)^{1{,}5}$ dus $A = \left(\frac{r}{6}\right)^{1{,}5}$

15 *Herschrijf de formule van B · r = 30 tot B = en vul deze in de tweede formule in.*

$\begin{cases} B \cdot r = 30 \\ A = \frac{18547}{B} + 56{,}6B + \frac{5279}{r} + 90{,}8r \end{cases}$

$B = \frac{30}{r}$ dus $A = \frac{18547}{\left(\frac{30}{r}\right)} + 56{,}6 \cdot \left(\frac{30}{r}\right) + \frac{5279}{r} + 90{,}8r$ dus

$A = 18547 \cdot \left(\frac{r}{30}\right) + 56{,}6 \cdot \left(\frac{30}{r}\right) + \frac{5279}{r} + 90{,}8r = \frac{18547}{30} \cdot r + 90{,}8r + \frac{1698}{r} + \frac{5279}{r}$

$A = \frac{21271}{30} \cdot r + \frac{6977}{r}$

Bereken algebraïsch de oplossing

16 *Het wortelteken kan alleen weggewerkt worden als het geïsoleerd staat. Beide kanten kwadrateren. Wortels, dus controleer de antwoorden op de rekenmachine.*

$x + \sqrt{8+x} = 4$

$\sqrt{8+x} = 4 - x$ *wortel isoleren*

$8 + x = (4-x)^2 = 16 - 8x + x^2$ *beide kanten kwadrateren*

$x^2 - 9x + 8 = (x-1)(x-8) = 0$

$x = 1$ klopt en $x = 8$ vervalt *controleren*

Conclusie: $x = 1$

17 *Verdeel de worteltekens over beide zijden van het = teken. Wortels, dus controleer de antwoorden op de rekenmachine.*

$x\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = 0$

$x\sqrt{x+1} = -2\sqrt{x+1}$ maak gebruik van $A \cdot B = A \cdot C$ dus $B = C$ of $A = 0$, dus

$x = -2 \vee \sqrt{x+1} = 0$

dus $x = -2 \vee x = -1$ controleren: $x = -2$ vervalt en $x = -1$ klopt

Conclusie: $x = -1$

18 *Ga na dat de teller gelijk gesteld moet worden aan 0 en los op. Controleer noemer ≠ 0*

$\frac{(4x-1) \cdot 3 - (3x+1) \cdot (2x-1)}{(x+1)^2} = 0$

$(4x-1) \cdot 3 - (3x+1) \cdot (2x-1) = 0$

$12x - 3 - (6x^2 - x - 1) = -6x^2 + 13x - 2 = 0$

$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{169 - 4 \cdot -6 \cdot -2}}{-12} = \frac{-13+11}{-12} = \frac{1}{6}$ en $x_2 = \frac{-13-11}{-12} = 2$

19 *Stel beide factoren gelijk aan nul en los op.*

$(4x^2 - 8)^3 (2x+1) = 0$

$4x^2 - 8 = 0$ of $2x + 1 = 0$

$x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$

20 *Werk eerst de x^{-2} en de x^{-3} weg door met x^3 te vermenigvuldigen en los daarna op.*

$2000 \cdot x^{-2} - 40000 \cdot x^{-3} = 0$

$2000 \cdot x - 40000 = 2000(x - 20) = 0$

$x = 20$

Bereken algebraïsch de waarde van *a* en *b*

21 $\begin{cases} a - b = 178 \\ a - 0{,}36b = 205 \end{cases}$

$a = b + 178$ invullen in $a - 0{,}36b = 205$ geeft $b + 178 - 0{,}36b = 205$

$0{,}64b = 27$ dus $b = \frac{27}{0{,}64} = 42{,}1875$ en $a = 42{,}1875 + 178 = 220{,}1875$

22 $\frac{3x+7}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$

$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} =$ herschrijven tot één breuk door de noemers gelijk te maken

$\frac{a(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{b(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \frac{ax + bx + 3a + 2b}{(x+2)(x+3)} = \frac{(a+b)x + (3a+2b)}{(x+2)(x+3)}$

dus $a + b = 3$ en $3a + 2b = 7$

$a = 3 - b$ invullen in $3a + 2b = 7$ geeft $3(3-b) + 2b = 7$ dus $9 - b = 7$

dus $b = 2$ en $a = 1$

Werk de haakjes weg en herleid zo ver mogelijk

23 $(30-2x^3)^2 = (30-2x^3)(30-2x^3) = 900-120x^3+4x^6$

24 $a\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - a\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = a\cdot\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - a\cdot\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{4a}{n}$

25 $11\,000\cdot 0{,}9^t\cdot(0{,}7-0{,}5\cdot 0{,}9^{2t}) = 7700\cdot 0{,}9^t - 5500\cdot 0{,}9^{3t}$

26 $0{,}007\,(8G)^{0{,}425}\cdot(2L)^{0{,}725} = 0{,}007\cdot 8^{0{,}425}\cdot G^{0{,}425}\cdot 2^{0{,}725}L^{0{,}725} =$
$0{,}007\cdot 4\cdot G^{0{,}425}\cdot L^{0{,}725} = 0{,}028\cdot G^{0{,}425}\cdot L^{0{,}725}$ dit kan ook geschreven worden als
$0{,}028\cdot G^{\frac{17}{40}}L^{\frac{29}{40}} = 0{,}028\cdot\sqrt[40]{G^{17}\cdot L^{29}}$

Herschrijf tot de gevraagde vorm

27 $\left(6{,}9+\frac{298{,}5}{\frac{L}{T}\cdot 3600}\right)\cdot L = \left(6{,}9+\frac{298{,}5\cdot T}{3600\cdot L}\right)\cdot L = 6{,}9L+\frac{298{,}5\cdot T}{3600} \approx 6{,}9L+0{,}083T$

28 $\frac{2q^2-8q+16}{q} = 2q-8+16q^{-1}$

29 $\frac{3000}{t}\cdot\left(1-\frac{1}{t}\right) = \frac{3000}{t}-\frac{3000}{t^2} = \frac{3000t}{t^2}-\frac{3000}{t^2} = \frac{3000t-3000}{t^2}$

30 $\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$
$\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

31 $\sqrt{1-x}+\frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x}}+\frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1-x+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

32 $\frac{60v}{\frac{v^2}{2a}+k} = \frac{60v}{\frac{v^2}{2a}+k}\cdot\frac{2a}{2a} = \frac{60v\cdot 2a}{\frac{v^2\cdot 2a}{2a}+k\cdot 2a} = \frac{120av}{v^2+2ak}$

33 $\sqrt[3]{1000x} = \sqrt[3]{1000}\cdot\sqrt[3]{x} = 10\cdot x^{\frac{1}{3}}$

34 $y = 10^{3+4x} = 10^3\cdot 10^{4x} = 10^3\cdot(10^4)^x$

35 *Gebruik kwadraat afsplitsen.*
$x^2+8x+15 = x^2+8x+16-1 = (x+4)^2-1$

36 *Gebruik kwadraat afsplitsen.*
$x^2-3x+\left(1\frac{1}{2}\right)^2-\left(1\frac{1}{2}\right)^2+12 = \left(x-1\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+12 = \left(x-1\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+12 = \left(x-1\frac{1}{2}\right)^2+9\frac{3}{4}$

Stangenvlinders

37 *De twee dikgedrukte rechthoekige driehoeken doen denken aan de Stelling van Pythagoras. Noteer Pythagoras twee keer, werk uit en ga na wat opvalt. Ga na hoe de kwadraten uitgewerkt moeten worden. Let op plussen en minnen.*
$10^2 = h^2+(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x)^2$ en $18^2 = h^2+(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x)^2$ dus
$h^2 = 100-(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x)^2 =$ $h^2 = 324-(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x)^2$
$h^2 = 100-\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}x^2\right)$ $h^2 = 324-\left(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}x^2\right)$
$h^2 = 100-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}x^2$ $h^2 = 324-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}x^2$ dus
$100-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}x^2 = 324-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}x^2$ geeft
$xy = 224$ en dus geldt: $y = \frac{224}{x}$

38 *Gebruik het gegeven $y = 17{,}5$ samen met het resultaat van de vorige opgave.*
Omdat $y = 17{,}5$ en $y = \frac{224}{x}$ geldt $x = 12{,}8$
Dus $h^2 = 100-(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x)^2 = 100-(\frac{1}{2}\cdot 17{,}5-\frac{1}{2}\cdot 12{,}8)^2 \approx 94{,}48$
Conclusie: $h \approx 9{,}7$

Landing

39 *Er zijn twee mogelijke oplossingsmethoden.*
eerste methode: differentiëren, gelijkstellen aan nul en x oplossen.
$y = 8-2{,}4\cdot 10^{-3}\cdot x^2+1{,}6\cdot 10^{-5}\cdot x^3$
$y' = -4{,}8\cdot 10^{-3}\cdot x+4{,}8\cdot 10^{-5}\cdot x^2$ $(= -0{,}0048x+0{,}000048x^2)$
$x\cdot(-4{,}8\cdot 10^{-3}+4{,}8\cdot 10^{-5}\cdot x) = 0$
$x = 0$ of $4{,}8\cdot 10^{-5}\cdot x = 4{,}8\cdot 10^{-3}$
$x = 0$ of $x = \frac{4{,}8\cdot 10^{-3}}{4{,}8\cdot 10^{-5}} = 10^2 = 100$

tweede methode: differentiëren, x–coördinaten invullen en laten zien dat er nul uitkomt.
$y = 8-2{,}4\cdot 10^{-3}\cdot x^2+1{,}6\cdot 10^{-5}\cdot x^3$
$y' = -4{,}8\cdot 10^{-3}\cdot x+4{,}8\cdot 10^{-5}\cdot x^2$
$y'(0) = 0$ en $y'(100) = -4{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 100+4{,}8\cdot 10^{-5}\cdot 100^2 = -0{,}48+0{,}48 = 0$
Er wordt een algebraïsche manier gevraagd: laat bij $x = 100$ een korte berekening zien.

40 *Je weet $x = 500t$ en de hoogte y wordt gevraagd. Bewijs, dus de grafische rekenmachine mag niet gebruikt worden.*
Gegeven $y = 8-2{,}4\cdot 10^{-3}\cdot x^2+1{,}6\cdot 10^{-5}\cdot x^3$ en $x = 500t$ dus
$y = 8-2{,}4\cdot 10^{-3}\cdot(500t)^2+1{,}6\cdot 10^{-5}\cdot(500t)^3$
$y = 8-2{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 500^2\cdot t^2+1{,}6\cdot 10^{-5}\cdot 500^3\cdot t^3$
$y = 8-600\cdot t^2+2000\cdot t^3$
Let op: noteer ook de middelste regel.

41 *Het ligt voor de hand om eerst y″ te bepalen. Let op: er wordt gesproken over 'de absolute waarde'. Houd hier bij het antwoord rekening mee.*

$y(t) = 8 - 600 \cdot t^2 + 2000 \cdot t^3$

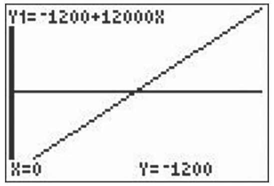
$y'(t) = -1200 \cdot t + 6000 \cdot t^2$

$y''(t) = -1200 + 12000 \cdot t$

$y''(0) = -1200 + 12000 \cdot 0 = -1200$ en $y''(0{,}2) = -1200 + 12000 \cdot 0{,}2 = 1200$

Conclusie: voor het interval [0; 0,2] neemt y'' toe van –1200 tot 1200, en y'' is een lineaire formule, dus aan de voorwaarde is voldaan.

Let op: 'absolute waarde', dus het berekenen van alleen de maximale waarde is niet genoeg. Ga na waarom vermeld moet worden dat y″ een lineaire formule is.
Met behulp van een plot laat je gemakkelijk zien dat de grafiek van y″ tussen x = 0 en x = 0,2 voldoet aan de voorwaarde dat de absolute waarde tussen y″(0) = –1200 en y″(0,2) = 1200 ligt.



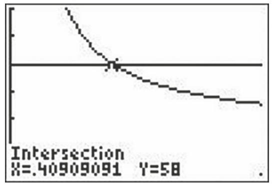
Menselijk oog

42 *Het gaat om twee keer het berekenen van a met b = 0,018, één keer met S = 58 en één keer met S = 63. Bereken, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.*

$58 = \dfrac{a + 0{,}018}{a \cdot 0{,}018}$ levert $a = 0{,}409...$

$63 = \dfrac{a + 0{,}018}{a \cdot 0{,}018}$ levert $a = 0{,}134...$

de gevraagde afstand ligt tussen de 0,134... en de 0,409...
dus in twee decimalen geldt $0{,}13 < a < 0{,}41$ of $0{,}14 \leq a \leq 0{,}40$
Geef duidelijk aan wat je in de grafische rekenmachine invoert.

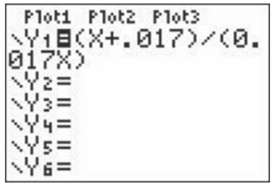


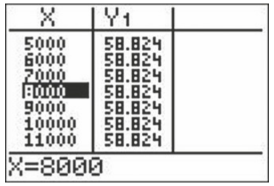
43 *Bereken, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.*
Er geldt $a \geq 0{,}15$ en $b = 0{,}017$
vergelijking met $a = 0{,}15$ en $b = 0{,}017$ levert $S \approx 65{,}49$ is afgerond 65

voor grote waarden van a nadert $S = \dfrac{a+b}{a \cdot b} = \dfrac{a + 0{,}017}{a \cdot 0{,}017}$ tot $\dfrac{\frac{a}{a} + \frac{0{,}017}{a}}{0{,}017} = \dfrac{1+0}{0{,}017} \approx 58{,}82$

Conclusie: $59 \leq S \leq 65$

De waarde $S \approx 59$ kan ook met de tabel van de grafische rekenmachine gevonden worden. Geef duidelijk aan wat je in de grafische rekenmachine invoert.
schermen TI-84:





Brandstofverbruik

44 *Let op: v is de snelheid van het schip ten opzichte van het water.*
snelheid $_{schip}$ = 20 km/u ten opzichte van het water.
stroomsnelheid water = 8 km/u
snelheid schip stroomopwaarts ten opzichte van het land = 20 – 8 = 12 km/u

benodigde tijd voor 42 km is $\dfrac{42}{12} = 3{,}5$ uur

snelheid schip stroomafwaarts ten opzichte van het land is 20 + 8 = 28 km/u

benodigde tijd voor 42 km is $\dfrac{42}{28} = 1{,}5$ uur

Conclusie: totale benodigde tijd heen en terug = 3,5 + 1,5 = 5 uur.

45 snelheid schip stroomopwaarts ten opzichte van het land is $v - 8$

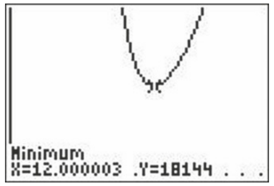
benodigde vaartijd T voor 42 km is dus $\dfrac{42}{v-8}$ uur

Gegeven is $B = T \cdot v^3$ dus $B = \dfrac{42}{v-8} \cdot v^3 = \dfrac{42v^3}{v-8}$

46 *Algebraïsch, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
"Minimaal" dus afgeleide = 0
B is een quotiëntfunctie dus gebruik quotiëntregel.

$B' = \dfrac{(v-8) \cdot 126v^2 - 42v^3 \cdot 1}{(v-8)^2} = \dfrac{84v^3 - 1008v^2}{(v-8)^2} = 0$

$84v^3 - 1008v^2 = 0$ dus $84v^2(v - 12) = 0$ dus
$v = 0$ of $v = 12$
Conclusie: minimum voor $v = 12$ ($v = 0$ vervalt)
Ter controle maak je een plot van B (zie schermafbeelding)



2 Functies (lineair-, machts-, wortel- en gebroken functies)

Lengte lijnstuk

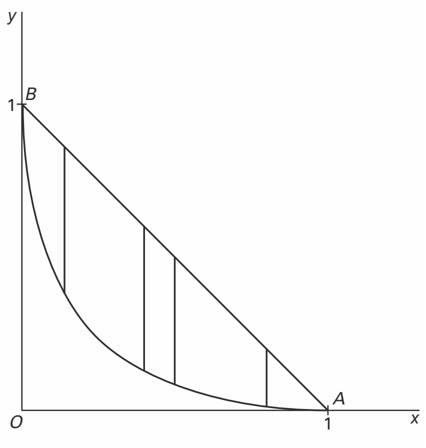
Gegeven is de functie $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ met $0 \leq x \leq 1$.
Verder is gegeven het lijnstuk AB met $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$. Zie figuur 1.
Tussen de grafiek van f en het lijnstuk AB worden verticale verbindingslijnstukken getekend. In figuur 1 zijn enkele verbindingslijnstukken getekend.

1 Toon aan dat de lengte van een verticaal verbindingslijnstuk gegeven wordt door de formule $L = -2x + 2\sqrt{x}$.

2 Bereken exact de maximale lengte van zo'n verbindingslijnstuk.

3 Bewijs dat $f(x) = f^{\text{inv}}(x)$.

figuur 1



Machten van een derdegraadsfunctie

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ op het domein [0, 3].

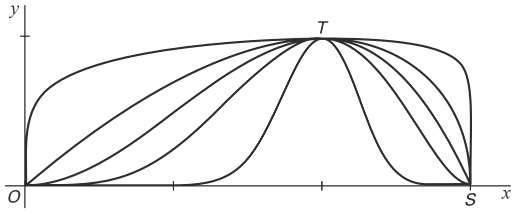
4 Toon algebraïsch aan dat het maximum van f gelijk is aan 1.

V is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

5 Bereken algebraïsch de exacte waarde van de oppervlakte van V.

Op het domein [0, 3] bekijken we de functies $g_p(x) = (f(x))^p = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right)^p$, waarbij $p > 0$.
In figuur 2 zijn de grafieken van g_p getekend voor $p = 10$, $p = 2$, $p = 1$, $p = 0{,}5$ en $p = 0{,}1$. Al deze grafieken gaan door de punten $O(0, 0)$, $T(2, 1)$ en $S(3, 0)$.

figuur 2



Voor *elke* positieve waarde van p gaat de grafiek van g_p door O, T en S.

6 Bewijs dit.

©ThiemeMeulenhoff

Integraal

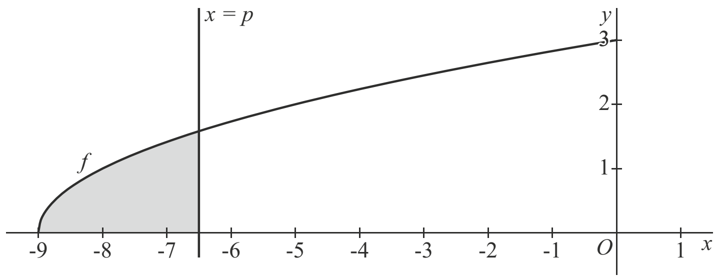
Er is één positieve waarde van a waarvoor geldt: $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 10$.

7 Bereken deze waarde.

Het achtste deel

Op het domein [–9, 0] is de functie f gegeven door $f(x) = \sqrt{x + 9}$.
In figuur 1 is de grafiek van f getekend en een lijn met vergelijking $x = p$ met $-9 < p \leq 0$.
Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en deze lijn is met grijs aangegeven.

figuur 3



De oppervlakte van het grijze gebied noemen we A. De waarde van A hangt af van de waarde van p. Er geldt:

$$A(p) = \frac{2}{3}(p + 9)^{\frac{3}{2}}$$

8 Bewijs dat $A(p) = \frac{2}{3}(p + 9)^{\frac{3}{2}}$.

Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ het achtste deel is van de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.

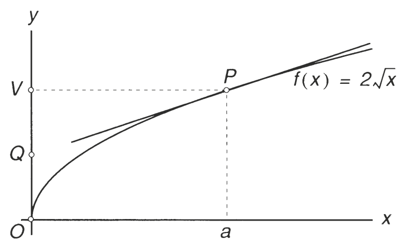
9 Bereken exact deze waarde van p.

Wortelfunctie

Op de grafiek van de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$ ligt een punt P met x-coördinaat a ($a \neq 0$).
V is het voetpunt van P op de y-as.
Q is het midden van lijnstuk OV.
Zie figuur 4.

10 Bewijs dat de raaklijn in P aan de grafiek van f door punt Q gaat.

figuur 4



©ThiemeMeulenhoff

Transformaties

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + x \cdot |5 + 2x|$

11 De grafiek van f wordt drie naar rechts verschoven en vervolgens vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as met een factor 2. Bepaal de vergelijking van de functie die zo ontstaat en schrijf je antwoord zonder absoluutstrepen.

Gemiddelde snelheid

Van een bewegend object wordt de snelheid v (in m/sec) afhankelijk van de tijd t (in sec) op het tijdsinterval [0, 4] gegeven door de formule:

$v(t) = 8 - t\sqrt{t}$

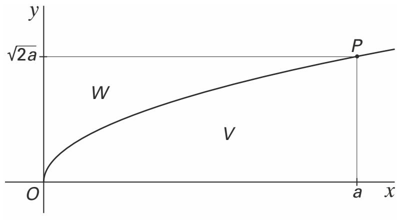
12 Bereken de gemiddelde snelheid van het object op het tijdsinterval [0, 4].

Gelijke inhoud

Op de grafiek van $y = \sqrt{2x}$ ligt een punt $P(a, \sqrt{2a})$, met $a > 0$.
De rechthoek met hoekpunten $O(0, 0)$ en P, waarvan twee zijden langs de assen vallen, wordt door de grafiek verdeeld in de twee stukken V en W. Zie figuur 5.
V wordt gewenteld om de x-as; W wordt gewenteld om de y-as.

13 Bereken de exacte waarde van a waarvoor deze omwentelingslichamen dezelfde inhoud hebben.

figuur 5



Gebroken functie

Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{4}{x}$

14 Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de lijn $y = 5$ en de grafiek van f.

15 Bereken met behulp van primitiveren de exacte waarde van de oppervlakte van V.

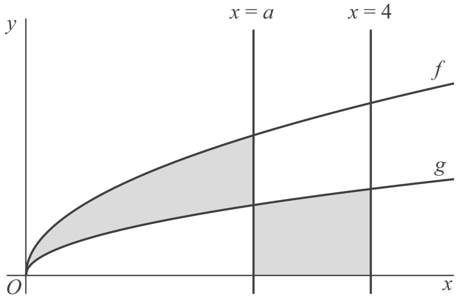
lengte kromme = $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

16 Bereken de omtrek van V in twee decimalen nauwkeurig.

Wortelfuncties

In de figuur zijn de grafieken getekend van de functies f en g gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Verder zijn de lijnen getekend met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$, met $0 < a < 4$.

figuur 6



In figuur 6 zijn twee vlakdelen grijs gemaakt. Het ene grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafieken van f en g en de lijn met vergelijking $x = a$. Het andere grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafiek van g, de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$.

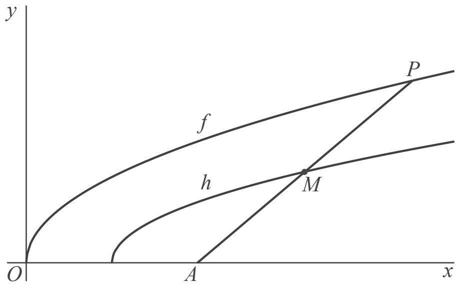
17 Bereken exact voor welke waarde van a deze vlakdelen gelijke oppervlakte hebben.

Gegeven is het punt $A(2, 0)$. Bij elk punt P op de grafiek van f kan het midden van lijnstuk AP worden bepaald. Dat midden noemen we M.

Verder is de functie h gegeven door $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$.

In figuur 7 zijn de grafieken van f en h getekend. Ook is voor een punt P het lijnstuk AP met midden M getekend.

figuur 7



Er geldt: voor elk punt P op de grafiek van f ligt het punt M op de grafiek van h.

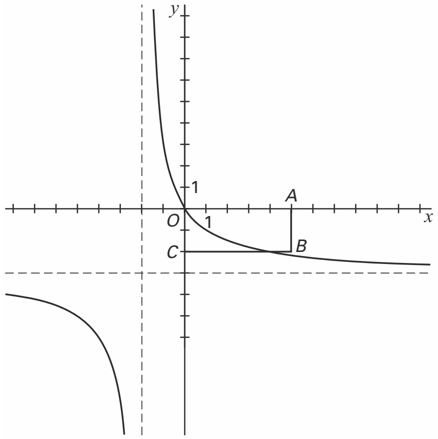
18 Bewijs dit.

Asymptoot, raaklijn, oppervlakte

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$

19 Herschrijf f in de vorm $f(x) = \dfrac{a}{x+2} + b$ en bepaal de asymptoten van de grafiek van f. Zie figuur 8.

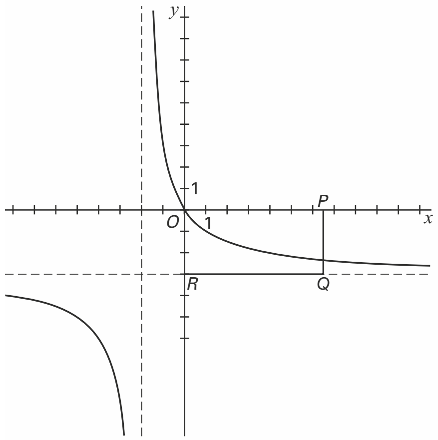
figuur 8



In figuur 8 is rechthoek $OABC$ getekend met $A(5, 0)$ en $C(0, -2)$. De raaklijn in O aan de grafiek van f verdeelt rechthoek $OABC$ in twee delen.

20 Bereken exact de verhouding van de oppervlaktes van deze twee delen.

figuur 9



In figuur 9 is rechthoek $OPQR$ getekend met $R(0, -3)$ en $P(b, 0)$ met $b > 0$. De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

21 Bereken b in twee decimalen nauwkeurig.

©ThiemeMeulenhoff

Asymptoot en knikpunt

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4 \cdot |x-1| - 6}{2x-5}$

22 De functie f heeft een knikpunt, een perforatie en een horizontale asymptoot. Bereken exact het knikpunt, de perforatie en de horizontale asymptoot.

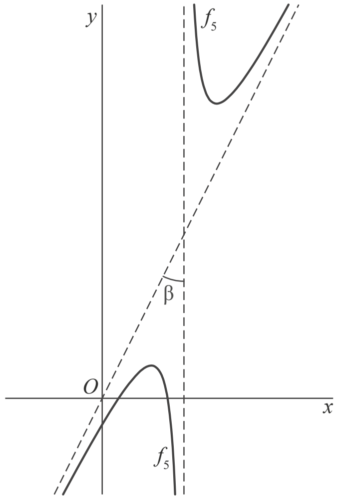
Asymptoten, perforatie en linkertop

Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{4x^2 - 10x + 4}{2x - a} \quad \text{met } x \neq \frac{1}{2}a$$

De grafiek van f_5 heeft een verticale asymptoot en een scheve asymptoot. De twee asymptoten snijden elkaar onder een hoek β met β in graden. In de figuur is de grafiek van f_5 met de asymptoten en hoek β weergegeven.

figuur 10



23 Bereken algebraïsch de waarde van β.

Er zijn waarden van a, zoals $a = 5$ (zie figuur), waarvoor de grafiek van f_a twee toppen heeft. De top met de kleinste x-coördinaat noemen we de linkertop. Er is een waarde van a waarvoor de linkertop op de y-as ligt.

24 Bereken exact voor welke waarde van a de linkertop op de y-as ligt.

Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een lijn met een perforatie is.

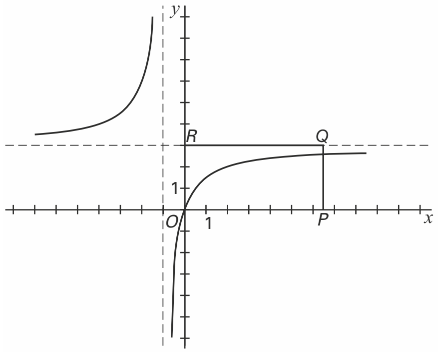
25 Bereken exact, voor de grootste van die twee waarden van a, de coördinaten van de perforatie.

©ThiemeMeulenhoff

Gelijke oppervlakte

Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \dfrac{3}{x+1}$ Zie figuur 11.

figuur 11



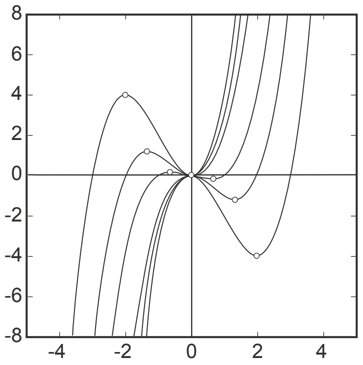
In figuur 11 is rechthoek *OPQR* getekend met $R(0, 3)$ en $P(b, 0)$ met $b > 0$.
De grafiek van *f* verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

26 Bereken *b* in twee decimalen nauwkeurig.

Verzameling toppen

Voor elke waarde van *a* wordt in het *Oxy*-vlak een kromme gegeven met vergelijking $y = x^3 + ax^2$.
In figuur 12 zijn de krommen getekend voor $a = \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
Elk van deze krommen, uitgezonderd de kromme voor $a = 0$, heeft twee toppen.
Al deze toppen vormen zelf ook weer een kromme.

figuur 12

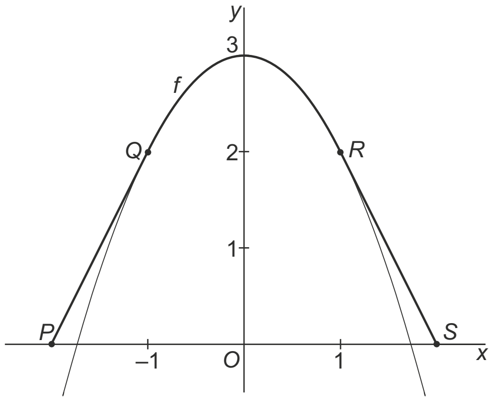


27 Leid een vergelijking af voor deze kromme.

Over een parabool gespannen

In figuur 13 is de grafiek van de functie *f* met $f(x) = 3 - x^2$ getekend. Tussen twee punten *P* en *S* die even ver van *O* op de *x*-as liggen, wordt denkbeeldig een touwtje gespannen dat over deze parabool heen gaat. Het touwtje wordt zo gespannen dat het tussen de punten $Q(-1, 2)$ en $R(1, 2)$ precies over de parabool ligt; tussen *P* en *Q* en tussen *R* en *S* is het touwtje recht.
PQ en *RS* zijn raaklijnstukken aan de grafiek van *f*.

figuur 13



De *x*-coördinaat van *S* is 2.

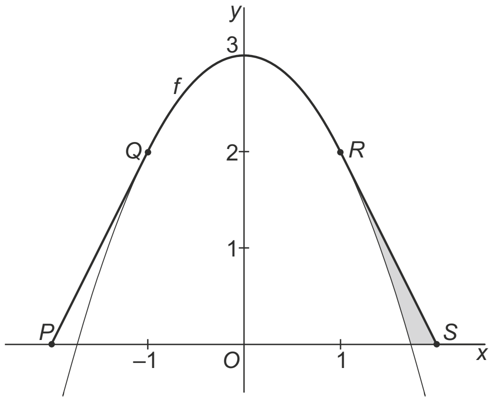
28 Bewijs dit.

De formule voor de lengte van een kromme is $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

29 Bereken de lengte van het touwtje. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

In figuur 14 is een vlakdeel grijs gekleurd. Dit vlakdeel wordt ingesloten door de grafiek van *f*, het lijnstuk *RS* en de x-as.

figuur 14



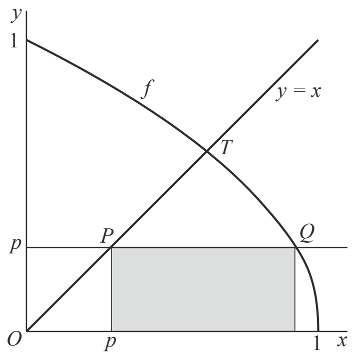
30 Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

Tussen twee grafieken

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \sqrt{1 - x}$.

In figuur 15 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van *f* en de lijn $y = x$ getekend.
De grafiek van *f* en de lijn $y = x$ snijden elkaar in het punt *T*.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en *T* een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van *f* in het punt *Q*.

figuur 15



De rechthoek waarvan *PQ* een zijde is en waarvan de tegenoverliggende zijde op de *x*-as ligt, is in figuur 12 voor een waarde van *p* grijs gemaakt.

De *x*-coördinaat van *Q* is $1 - p^2$.

31 Bewijs dit.

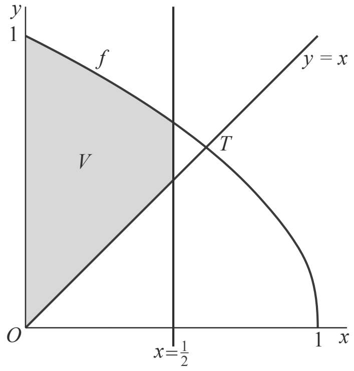
Er is een waarde van *p* waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

32 Bereken exact deze waarde van *p*.

Het gebied *V* wordt begrensd door de grafiek van *f*, de *y*-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = \frac{1}{2}$.
Zie figuur 16.

33 Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat wanneer *V* om de *x*-as wordt gewenteld.

figuur 16



Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

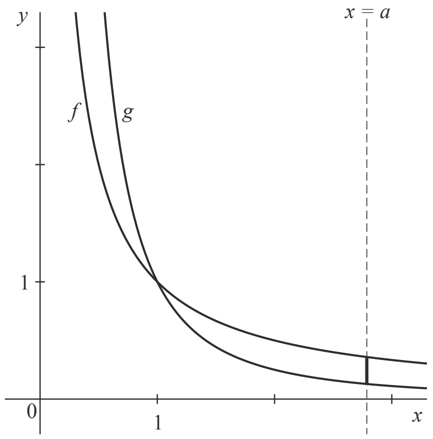
De functies *f* en *g* zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$.

De grafieken van *f* en *g* snijden elkaar in het punt (1, 1).

Voor $a > 1$ bekijken we bij $x = a$ het verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van *f* en *g*. Zie figuur 17.

34 Bereken op algebraïsche wijze de exacte waarden van *a* waarvoor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

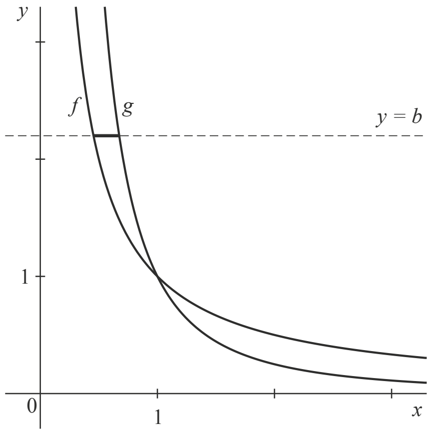
figuur 17



Voor $b > 1$ bekijken we bij $y = b$ het horizontale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van *f* en *g*. Zie figuur 18.
De *x*-coördinaten van de eindpunten van dit verbindingslijnstuk zijn respectievelijk $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.
Voor een zekere waarde van *b* is de lengte van dit lijnstuk maximaal.

35 Bereken met behulp van differentiëren de maximale lengte van het horizontale verbindingslijnstuk.

figuur 18

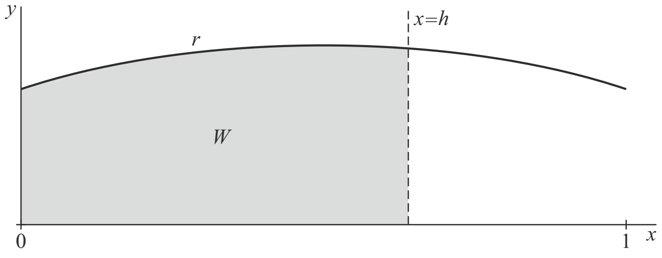


Een regenton

Op het domein [0, 1] is de functie r gegeven door $r(x) = \frac{1}{10}\sqrt{5 + 15x - 15x^2}$.

W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as, de y-as, de grafiek van r en de lijn $x = h$, met $0 < h \leq 1$. Zie figuur 19.

figuur 19



Voor het volume V van het omwentelingslichaam dat ontstaat door vlakdeel W om de x-as te wentelen, geldt:

$$V = \frac{\pi}{40}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right)$$

36 Bewijs dat deze formule voor V juist is.

Als de grafiek van r om de x-as gewenteld wordt, ontstaat een figuur die lijkt op een regenton. Voor x, h en r nemen we de meter als eenheid, zodat de ton 1 meter hoog is.
V is dus het volume van het water in de ton als het water h meter hoog staat.

foto

37 Bereken de waterhoogte in de ton als deze voor drie vierde deel is gevuld. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

©ThiemeMeulenhoff

Acht keer zo groot

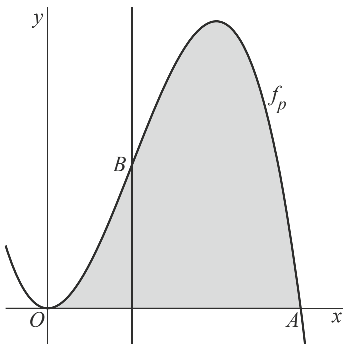
Voor $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
De grafiek van f_p raakt de x-as in het punt $O(0, 0)$ en snijdt deze in het punt $A(3p, 0)$.
Verder heeft de grafiek van f_p een buigpunt $B(p, 2p^3)$.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door het buigpunt verdeelt V in twee delen.
In figuur 20 is deze situatie weergegeven.

De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

38 Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linkerdeel.

figuur 20



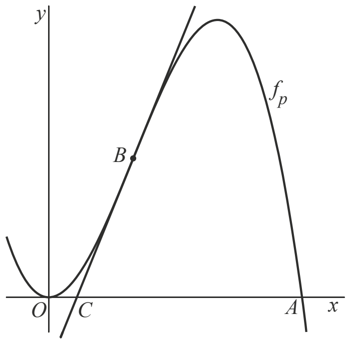
Er is een waarde van p waarvoor geldt:
de lijnstukken BO en AO zijn even lang.

39 Bereken exact deze waarde van p.

De buigraaklijn in B snijdt de x-as in punt C.
In figuur 21 is deze situatie weergegeven.

40 Bewijs dat de lengte van CA voor elke waarde van $p > 0$ acht keer zo groot is als de lengte van OC.

figuur 21



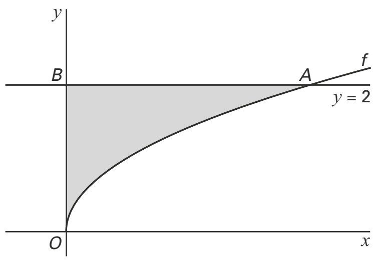
©ThiemeMeulenhoff

Kromme van middens

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $y = 2$ snijdt de grafiek van f in punt A en de y-as in punt B. Zie figuur 15.
V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = 2$.
In figuur 22 is V grijs gemaakt.

41 Bereken de oppervlakte van V.

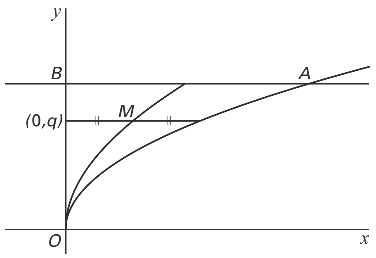
figuur 22



We bekijken het horizontale verbindingslijnstuk tussen een punt $(0, q)$ en de grafiek van f, met $0 < q \leq 2$.
M is het midden van dit lijnstuk.
In figuur 23 is dit voor een waarde van q getekend. Hierin is ook de kromme $y = \sqrt{2x}$ getekend.

42 Bewijs dat M op de grafiek van $y = \sqrt{2x}$ ligt.

figuur 23



W is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{2x}$, de y-as en de lijn $y = 2$.
We wentelen de gebieden V en W beide om de y-as.
De inhoud van het omwentelingslichaam van V is gelijk aan $\frac{32}{5}\pi$. De inhoud van het omwentelingslichaam van W is een percentage hiervan.

43 Bereken dit percentage exact.

©ThiemeMeulenhoff

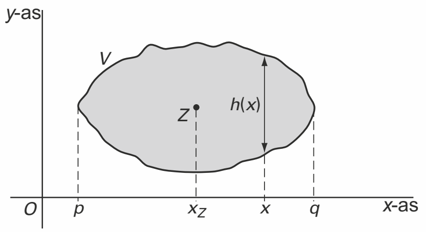
Zwaartepunt

De coördinaten van het zwaartepunt van een vlakdeel kun je met de formule hieronder berekenen.

Van vlakdeel V is Z het zwaartepunt.
De coördinaten van Z zijn x_Z en y_Z.
Er geldt:

$$x_Z = \frac{1}{\text{oppervlakte van } V} \cdot \int_p^q x \cdot h(x)\,dx$$

Hierbij is $h(x)$ de bij x behorende hoogte van V, voor $p \leq x \leq q$.
de berekening van y_Z verloopt op een soortgelijke manier.

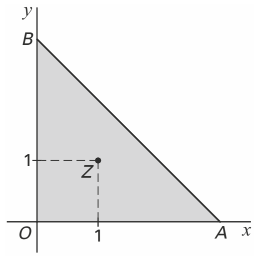


De vlakdelen in deze opgave zijn symmetrisch in de lijn $y = x$. Dus geldt $y_Z = x_Z$.

De hoekpunten van driehoek OAB zijn $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ en $B(0, 3)$. Zie figuur 24.

44 Bewijs met de formule in het kader dat het zwaartepunt van driehoek OAB het punt $(1, 1)$ is.

figuur 24

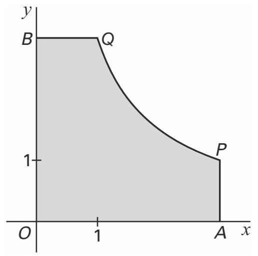


Het vlakdeel $OAPQB$ in figuur 25 wordt begrensd door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de hyperbool

$$y = \frac{3}{x}$$

45 Bereken exact de x-coördinaat van het zwaartepunt van dit vlakdeel.

figuur 25



©ThiemeMeulenhoff

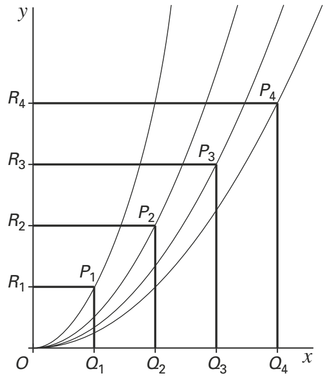
Onafhankelijk van *n*

De grafieken van de functies $y = \frac{1}{2}x^2$ en $y = x$ sluiten een gebied G in. Door dit gebied G te wentelen om de x-as ontstaat een omwentelingslichaam.

46 Bereken de exacte waarde van de inhoud van dit omwentelingslichaam.

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ bekijken we het vierkant $OQ_nP_nR_n$, waarvan twee zijden langs de coördinaatassen vallen en waarvan het punt $P_n(n, n)$ een hoekpunt is.
De grafiek van de functie $y = \frac{1}{n}x^2$ gaat door O en door P_n. In figuur 26 is dit voor $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ en $n = 4$ getekend.

figuur 26

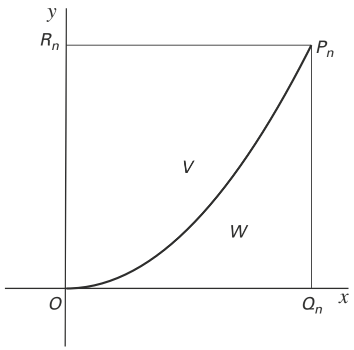


De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = \frac{1}{n}x^2$ in het punt P_n is onafhankelijk van n.

47 Bewijs dit.

De grafiek van $y = \frac{1}{n}x^2$ verdeelt het vierkant $OQ_nP_nR_n$ in twee stukken V en W. Zie figuur 27.

figuur 27



De verhouding van de oppervlakten van V en W is onafhankelijk van n.

48 Bewijs.

Hints bij hoofdstuk 2

1 Bepaal de vergelijking van lijn AB. Bedenk hoe de formules gebruikt kunnen worden om de formule voor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk te vinden.

2 Maximale lengte en exact dus denk aan differentiëren.

3 Inverse, dus spiegel in de lijn $y = x$ (verwissel x en y) of bewijs $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right) = x$

4 Algebraïsch en maximum dus $f'(x) = 0$

5 Bepaal de grenzen en bereken de oppervlakte exact met behulp van primitiveren.

6 Het gaat alleen om de punten O, T en S. Wat gebeurt er als je deze punten in de formule van g invult?

7 Schrijf de oppervlakte als integraal en bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

8 Oppervlakte, bepaal dus de primitieve van f.

9 Bereken eerst de gehele oppervlakte in het interval. Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

10 Bepaal eerst de vergelijking van de raaklijn aan f door $(a, 2\sqrt{a})$. Bedenk dat $V_y = 2\sqrt{a}$

11 Drie naar rechts, dus vervang elke x door $x - 3$,
vermenigvuldig ten opzichte van de y-as met 2, dus vervang elke x door $\frac{1}{2}x$.

12 Gemiddelde snelheid = totale afgelegde weg : totale tijd. Bedenk dat de totale afgelegde weg te berekenen is met een integraal.

13 Welke twee inhouden moeten berekend worden?
Formule voor wenteling om de y-as is $\pi\int y^2\,dx$

14 Toppen berekenen, dus differentiëren en $f'(x) = 0$.

15 Bepaal eerst de snijpunten van de functie f en $y = 5$.

16 Uit welke stukken bestaat de omtrek? Maak gebruik van $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

17 Bereken eerst de waarden van beide oppervlakten apart. Welke vergelijking moet opgelost worden?

18 M is het midden van lijnstuk AP. Gebruik dit om de coördinaten van M in x_P uit te drukken.

19 Verticale asymptoot als noemer = 0 en teller $\neq$ 0. Horizontale asymptoot: onderzoek $x \to \infty$

20 Bepaal eerst de vergelijking van de raaklijn $y = ax + b$ in (0, 0). Bedenk dat het hier gaat om de oppervlakte van een driehoek en een rechthoek.

21 Druk de oppervlakte van de rechthoek uit in b. Schrijf de oppervlakte onder de grafiek als integraal en bedenk wat de uitkomst van deze integraal moet worden. Bereken, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.

22 Schrijf de functie eerst zonder absoluutstrepen. Perforatie als teller = 0 en noemer = 0.

23 Bepaal eerst de scheve asymptoot. Herschrijf de formule van f in de vorm
$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 5}$.

24 Top, dus $f'(x) = 0$ en top op de y-as, dus $x = 0$.

25 Perforatie als teller = 0 en noemer = 0.

26 Druk de oppervlakte van de rechthoek uit in *b*. Schrijf de oppervlakte onder de grafiek als integraal en bedenk wat de uitkomst van deze integraal moet worden. Bereken, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.

27 Druk de *x*-coördinaat en de *y*-coördinaat van de toppen uit in *a* en zoek daarna een verband tussen die twee.

28 Bereken waar de raaklijn aan de parabool in *R* de *x*-as snijdt.

29 Maak onderscheid tussen de boog *QR* (met de gegeven formule voor de lengte) en de twee rechte delen (met Pythagoras).

30 Ga na welke twee oppervlakten bepaald moeten worden om de gevraagde oppervlakte te berekenen.

31 Ga na dat voor *Q* geldt $y = p$

32 Maximaal, dus afgeleide gelijk stellen aan 0

33 Verdeel het gebied onder de grafiek van *f* in twee delen.

34 Welke formule hoort bij de lengte van een verticaal verbindingslijnstuk? Maak een vergelijking en los deze algebraïsch op.

35 Ga na wat de lengte van het lijnstuk is. Maak een vergelijking en los op.

36 Voor een omwentelingslichaam geldt inhoud $= \pi \cdot \int_0^h (f(x))^2\,dx$

37 Bereken eerst de totale inhoud van de ton. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.

38 Bepaal met een integraal de rechter oppervlakte. Gebruik als grenzen *p* en 3*p*.

39 Bepaal de lengte van *BO* met behulp van Pythagoras.

40 Stel met behulp van $f'(x)$ de vergelijking van de buigraaklijn op om de *x*-coördinaat van *C* te berekenen.

41 Schrijf de oppervlakte als integraal. Bereken, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.

42 Druk de coördinaten van punt *M* uit in *q*.

43 De gebieden worden om de *y*-as gewenteld. Exact, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is niet toegestaan.
inhoud $W = \pi \cdot \int_0^2 x^2\,dy$

44 Maak gebruik van de gegeven formule.

45 Verdeel de oppervlakte in twee handige stukken. Bereken voor elke stuk de oppervlakte en $\int x \cdot f(x)\,dx$

46 Exact, dus bereken algebraïsch. Bereken eerst de snijpunten en daarna de inhoud met behulp van primitiveren.

47 Gevraagd wordt naar de richtingscoëfficiënt in het punt met $x = n$, dus naar $y'(n)$

48 Grenzen bepalen, oppervlakte *V* bepalen en oppervlakte *W* bepalen.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 2

Lengte lijnstuk

1 lijn *AB*: $y = -x + 1$ en $f(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$
L = verticale verbindingslijnstuk
$L = (-x + 1) - \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 = -x + 1 - (1 - 2\sqrt{x} + x) = -2x + 2\sqrt{x}$

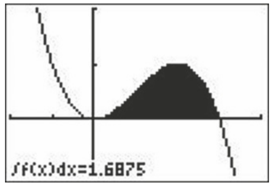
2 *Maximale lengte als L′ = 0.*
$L' = -2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ dus als $-2 + x^{-\frac{1}{2}} = 0$ dus $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ dus $x = \frac{1}{4}$
Conclusie: $L_{max.} = L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

3 *Inverse, dus spiegel in de lijn y = x (verwissel x en y) of bewijs* $f\left(f^{inv}(x)\right) = x$
eerste manier: spiegelen in y = x en herschrijven tot y = ...
$y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$ spiegelen in $y = x$ geeft $x = \left(1 - \sqrt{y}\right)^2$
Dus $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}$ dus $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$ kwadrateren geeft $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$
Conclusie: $f(x) = f^{inv}(x)$
tweede manier: bewijs $f\left(f^{inv}(x)\right) = x$
Als $f(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$ en $f^{inv}(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$ dan geldt:
$f\left(f^{inv}(x)\right) = \left(1 - \sqrt{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2}\right)^2 = \left(1 - \left(1 - \sqrt{x}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$
Conclusie: $f(x) = f^{inv}(x)$

Machten van een derdegraadsfunctie

4 *Algebraïsch, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is niet toegestaan; "maximum" dus afgeleide gelijk stellen aan 0.*
$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ dus $f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2$
maximum dus $f'(x) = 0$ dus $\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 = 0$ dus $6x - 3x^2 = 0$
dus $x(6 - 3x) = 0$. Het maximum wordt bereikt bij $x = 0$ of $x = 2$
$f(0) = 0$ en $f(2) = 1$
Conclusie: het maximum van *f* is gelijk aan 1

5 *Algebraïsch, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is niet toegestaan; "exact" dus niet afronden.*
De plot op de grafische rekenmachine (zie plaatje) is ter controle.
Grenzen bepalen met $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = 0$ levert $x = 0$ en $x = 3$
oppervlakte $= \int_0^3 \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4\right]_0^3 =$
$\left(\frac{1}{4} \cdot 3^3 - \frac{1}{16} \cdot 3^4\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{1}{16} \cdot 0^4\right) = \frac{27}{16}$ (=1,6875)



6 *Het gaat hier om een macht van f(x) voor de punten O, T en S dus respectievelijk met x = 0, x = 2 en x = 3*
Ga na wat er gebeurt met $(f(0))^p$, $(f(2))^p$ en $(f(3))^p$ voor $p > 0$

$(f(0))^p = 0^p = 0$ dus de grafiek gaat door $O(0, 0)$

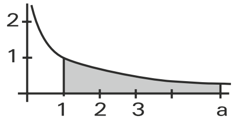
$(f(2))^p = \left(\frac{3}{4}\cdot 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^3\right)^p = 1^p = 1$ dus de grafiek gaat door $T(2, 1)$

$(f(3))^p = \left(\frac{3}{4}\cdot 3^2 - \frac{1}{4}\cdot 3^3\right)^p = 0^p = 0$ dus de grafiek gaat door $S(3, 0)$

Integraal

7 *Gegeven is een integraal met een uitkomst. De bovengrens a is niet gegeven.*

De oppervlakte tussen de grafiek van $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, de x-as, de lijn x = 1 en de onbekende rechtergrens x = a moet 10 zijn.



$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^a = \left[2\sqrt{x}\right]_1^a = 2\sqrt{a} - 2$

Dus $2\sqrt{a} - 2 = 10$ dus $\sqrt{a} = 6$
Conclusie: $a = 36$

Het achtste deel

8 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: oppervlakte dus primitieve van f bepalen.

Primitieve van $f(x) = \sqrt{x+9} = (x+9)^{\frac{1}{2}}$ is $F(x) = \frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}$

Oppervlakte gebied A =

$\int_{-9}^{p} \sqrt{x+9}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{-9}^{p} = \left(\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$

Conclusie: $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$

Opmerking: een formule voor de oppervlakte is gegeven. Deze formule kan in de volgende opgave(n) gebruikt worden.

9 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: bereken eerst de gehele oppervlakte op het interval [–9, 0]. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.

Oppervlakte $A(p)$ met $p = 0$ is $A(0) = \frac{2}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{9^3} = \frac{2}{3}\cdot 27 = 18$

Oppervlakte van het grijze gebied is dus $\frac{1}{8}\cdot 18 = 2\frac{1}{4}$

Opgelost moet worden: $A(p) = \frac{2}{3}\cdot(p+9)^{\frac{3}{2}} = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$(p+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}$ dus $(p+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$

$p+9 = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{(27)^2}}{\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

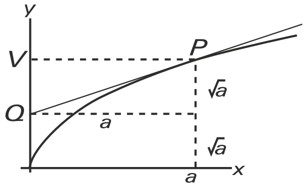
Conclusie: $p = 2\frac{1}{4} - 9 = -6\frac{3}{4}$

Wortelfunctie

10 *Van de situatie is bekend: functie $f(x) = 2\sqrt{x}$ met $x_P = a$, punt V met $y = 2\sqrt{a}$, punt Q ligt op de y-as met $y = \sqrt{x}$ en Q moet op de raaklijn aan de grafiek van f door P liggen.*
Aanpak: vergelijking van de raaklijn opstellen en coördinaten van Q invullen.

$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$ dus $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$ = richtingscoëfficiënt raaklijn dus

vergelijking van de raaklijn: $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot x + b$



b bepalen met coördinaten raakpunt $P(a, 2\sqrt{a})$:

$2\cdot\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot a + b$ en omdat $\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot a = \sqrt{a}$ geldt:

$b = \sqrt{a}$

Conclusie: raaklijn aan de grafiek van f: $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot x + \sqrt{a}$ gaat door $Q(0, \sqrt{a})$.

Transformaties

11 *Drie naar rechts, dus vervang elke x door x – 3,*
vermenigvuldig ten opzichte van de y-as met 2, dus vervang elke x door $\frac{1}{2}x$.
$f(x) = 2 + x\cdot|5 + 2x|$ 3 naar rechts verschuiven geeft
$f(x) = 2 + (x-3)\cdot|5 + 2(x-3)| = 2 + (x-3)\cdot|2x-1|$
$f(x) = 2 + (x-3)\cdot|2x-1|$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met 2 geeft

$f(x) = 2 + \left(\left(\frac{1}{2}x\right) - 3\right)\cdot\left|2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right| = 2 + \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot|x-1|$

$|x-1| = x-1$ voor $x \geq 1$ en $|x-1| = -(x-1)$ voor $x < 1$ dus

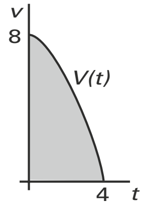
voor $x \geq 1$ geldt: $f(x) = 2 + \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot|x-1| = 2 + \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x + 5$
en
voor $x < 1$ geldt:

$f(x) = 2 + \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot|x-1| = 2 + \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot -(x-1) = 2 + -\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\cdot(x-1)$

$= -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x - 1$

Gemiddelde snelheid

12 *Gevraagd wordt naar de gemiddelde snelheid. Het probleem zit in het goed vertalen van de vraag.*
'De gemiddelde snelheid' betekent: de totale afgelegde weg s gedeeld door de gebruikte tijd t. Die tijd is 4 seconden. De totale afgelegde weg s is gelijk aan de oppervlakte van het gebied onder de gegeven functie v(t).
afgelegde afstand



$s = \int_0^4 (8 - t\sqrt{t})\,dt = \left[8t - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = 32 - \frac{2}{5}\cdot 32 = 19{,}2$

19,2 meter wordt afgelegd in 4 seconden.

Conclusie: gemiddelde snelheid = $\frac{\text{oppervlakte}}{\text{tijd}} = \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8$ m/sec

Gelijke inhoud

13 *Er wordt naar de inhoud van twee omwentelingslichamen gevraagd.*
V wordt om de x-as gewenteld, W wordt om de y-as gewenteld.
Start om de inhoud van het omwentelingslichaam van V te berekenen met $\pi\int y^2\,dx$
en start om de inhoud van het omwentelingslichaam van W te berekenen met $\pi\int x^2\,dy$.

lichaam V: $I_V = \pi\int_0^a (\sqrt{2x})^2\,dx = \pi\int_0^a 2x\,dx = \pi[x^2]_0^a = \pi\cdot a^2$

lichaam W:

omdat $y = \sqrt{2x}$ geldt $x = \frac{1}{2}y^2$ en de bovengrens is $\sqrt{2a}$

$$I_W = \pi\int_0^{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{2}y^2\right)^2 dy = \pi\int_0^{\sqrt{2a}} \frac{1}{4}y^4\,dy = \pi\left[\frac{1}{20}y^5\right]_0^{\sqrt{2a}} = \frac{1}{20}\pi\cdot 4a^2\sqrt{2a} = \frac{1}{5}\pi\cdot a^2\sqrt{2a}$$

Er moet gelden: inhoud V = inhoud W, dus $\pi\cdot a^2 = \frac{1}{5}\pi\cdot a^2\sqrt{2a}$ dus $5 = \sqrt{2a}$

Conclusie: $a = 12\frac{1}{2}$

Gebroken functie

14 *Toppen berekenen, dus differentiëren en f′(x) = 0*

$f(x) = x + \frac{4}{x} = x + 4x^{-1}$

$f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

top als $1 - \frac{4}{x^2} = 0$ dus $x = 2$ of $x = -2$

$f(2) = 4$ en $f(-2) = -4$
Conclusie: de coördinaten van de toppen zijn (2, 4) en (–2, –4)
Controleer antwoord met behulp van grafische rekenmachine.

15 *Grenzen bepalen, dus snijpunten van de functie f en y = 5 berekenen.*

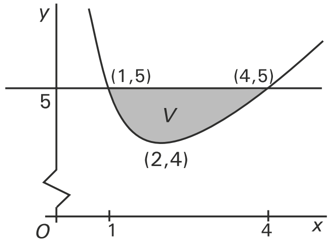
$x + \frac{4}{x} = 5$ dus $x^2 - 5x + 4 = 0$ dus $x = 1$ of $x = 4$
Controleer antwoord met behulp van grafische rekenmachine.

$$\text{opp} = \int_1^4 \left(5 - (x + \frac{4}{x})\right)dx = \int_1^4 \left(-x - \frac{4}{x} + 5\right)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - 4\ln|x| + 5x\right]_1^4 =$$

$-8 - 4\ln(4) + 20 + \frac{1}{2} + 0 - 5 = 7\frac{1}{2} - 4\ln(4)$

Conclusie: oppervlakte is $7\frac{1}{2} - 4\ln(4)$

16 lengte tussen (1, 5) en (4, 5) is 3
lengte kromme berekenen met booglengte



$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

booglengte $L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)^2}\,dx \approx 3{,}79$

(grafische rekenmachine)
Conclusie: gevraagde lengte is ongeveer 3 + 3,79 = 6,79

Wortelfuncties

17 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: geef de twee oppervlakten een naam, bijvoorbeeld gebied linksboven A en gebied rechtsonder B. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.
Oppervlakte gebied A = Oppervlakte gebied B

Oppervlakte gebied $A = \int_0^a (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^a \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx = \int_0^a \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx =$

$\int_0^a \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$ of $\frac{1}{3}a\sqrt{a}$

Oppervlakte gebied B =

$$\int_a^4 (g(x))\,dx = \int_a^4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx = \int_a^4 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_a^4 = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_a^4 = \frac{1}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\cdot a^{\frac{3}{2}}$$

Oppervlakte gebied A = Oppervlakte gebied B dus $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\cdot a^{\frac{3}{2}}$

$\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$ dus $2a^{\frac{3}{2}} = 8$ dus $a^{\frac{3}{2}} = 4$ dus $a^3 = 16$ dus $a = \sqrt[3]{16}$

(of $a^{\frac{3}{2}} = 4$ dus $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$ dus $a = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$)

Conclusie: $a = \sqrt[3]{16}$

Opmerking: vergeet de haakjes in de integraal niet.

18 *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maak een schets met daarin de coördinaten van de punten M en P. Maak een duidelijk onderscheid tussen x_P *en* y_P *op de grafiek van f en ook tussen* x_M *en* y_M *op de grafiek van h.*
$A(2, 0)$ en P ligt op de grafiek van f dus P is $(x_P, \sqrt{x_P})$ en M ligt in het midden van A en P.
eerste methode druk y_M *uit in* x_M:

x_M ligt halverwege $x = 2$ en $x = x_P$ dus $x_M = \frac{2 + x_P}{2} = 1 + \frac{1}{2}x_P = \frac{1}{2}x_P + 1$

y_M ligt halverwege $y = 0$ en $y_P = \sqrt{x_P}$ dus $y_M = \frac{1}{2}\sqrt{x_P}$

$x_M = \frac{1}{2}x_P + 1$ dus geldt $x_P = 2x_M - 2$. Dit invullen in $y_M = \frac{1}{2}\sqrt{x_P}$ geeft

$y_M = \frac{1}{2}\sqrt{2x_M - 2} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(2x_M - 2)} = \sqrt{\frac{1}{2}x_M - \frac{1}{2}}$ en $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

Conclusie: M ligt op de grafiek van h.

tweede methode vul y_M *en* x_M *in de formule van h(x) in:*

x_M ligt halverwege $x = 2$ en $x = x_P$ dus $x_M = \frac{2 + x_P}{2} = 1 + \frac{1}{2}x_P = \frac{1}{2}x_P + 1$

y_M ligt halverwege $y = 0$ en $y_P = \sqrt{x_P}$ dus $y_M = \frac{1}{2}\sqrt{x_P}$

invullen in $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ geeft $\frac{1}{2}\sqrt{x_P} = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_P + 1) - \frac{1}{2}}$ dus

$\frac{1}{2}\sqrt{x_P} = \sqrt{\frac{1}{4}x_P + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}x_P}$

$\frac{1}{2}\sqrt{x_P} = \sqrt{\frac{1}{4}x_P}$ dit klopt

Conclusie: M ligt op de grafiek van h.

Asymptoot, raaklijn, oppervlakte

19 *Verticale asymptoot als noemer = 0 en teller ≠ 0. Horizontale asymptoot: onderzoek $x \to \infty$*

$f(x) = \dfrac{-3x}{x+2} = \dfrac{-3(x+2)+6}{x+2} = \dfrac{-3(x+2)}{x+2} + \dfrac{6}{x+2} = -3 + \dfrac{6}{x+2} = \dfrac{6}{x+2} - 3$

Verticale asymptoot is $x = -2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x+2} - 3 = 0 - 3 = -3$, dus horizontale asymptoot is $y = -3$

20 *De raaklijn verdeelt het gebied in twee stukken. Bepaal eerst de vergelijking van de raaklijn.*

$f(x) = \dfrac{6}{x+2} - 3 = 6(x+2)^{-1} - 3$ dus $f'(x) = -6(x+2)^{-2} = \dfrac{-6}{(x+2)^2}$

$f'(0) = -1\frac{1}{2}$ dus de vergelijking van de raaklijn door (0, 0) is: $y = -1\frac{1}{2}x$

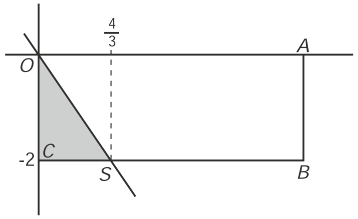
Het snijpunt van deze raaklijn en de horizontale lijn $y = -2$ is $(\frac{4}{3}, -2)$

oppervlakte van ΔOCS is $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$

oppervlakte rechthoek
$OABC$ is $5 \cdot 2 = 10$

oppervlakte vierhoek $OSBA$ is $10 - \frac{4}{3} = 8\frac{2}{3}$

Conclusie: verhouding is $\frac{4}{3} : 8\frac{2}{3}$ *of* $2 : 13$



21 *Let op: een oppervlakte is altijd positief en*

de uitkomst van $\int_0^b f(x)\,dx$ *is negatief (want oppervlakte ligt onder de x-as)*

Oppervlakte van rechthoek $OPQR$ is $3b$
De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

Elk deel heeft een oppervlakte van $\frac{3}{2}b$, dus moet gelden:

oppervlakte onder de grafiek $= -\int_0^b f(x)\,dx = \frac{3}{2}b$ dus $\int_0^b f(x)\,dx = -\frac{3}{2}b$

$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \left(\dfrac{6}{x+2} - 3\right) dx = \left[6\ln|x+2| - 3x\right]_0^b =$

$\left[6\ln(x+2) - 3x\right]_0^b = 6\ln(b+2) - 3b - 6\ln(2) = -\frac{3}{2}b$

Omdat $x + 2$ positief is, geldt: $6\ln|x+2| = 6\ln(x+2)$
Het antwoord mag gegeven worden in twee decimalen nauwkeurig.
De vergelijking oplossen met de grafische rekenmachine
voer in: $y_1 = 6\ln(x+2) - 3x - 6\ln 2$ en $y_2 = -1{,}5x$
los op: $y_1 = y_2$ *(gebruik bijvoorbeeld de tabel, de grafiek met intersect of de solver)*
Conclusie: $b \approx 5{,}03$

Asymptoot en knikpunt

22 *Schrijf de functie eerst zonder absoluutstrepen.*
voor $x \geq 1$ geldt $|x-1| = x-1$ en voor $x < 1$ geldt $|x-1| = -(x-1)$ dus knikpunt $(1, f(1)) = (1, 2)$

voor $x \geq 1$ geldt: $f(x) = \dfrac{4\cdot|x-1|-6}{2x-5} = \dfrac{4\cdot(x-1)-6}{2x-5} = \dfrac{4x-4-6}{2x-5} = \dfrac{4x-10}{2x-5}$

$= \dfrac{2\cdot(2x-5)}{2x-5} = 2$ voor $x \neq 2\frac{1}{2}$

dus perforatie $(2\frac{1}{2}, 2)$

en

voor $x < 1$ geldt: $f(x) = \dfrac{4\cdot|x-1|-6}{2x-5} = \dfrac{4\cdot -(x-1)-6}{2x-5} = \dfrac{-4x+4-6}{2x-5} = \dfrac{-4x-2}{2x-5}$

onderzoek horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$

eerste manier:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x-2}{2x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{-4x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4 - \frac{2}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \dfrac{-4+0}{2+0} = -2$

tweede manier:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x-2}{2x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2\cdot(2x-5)-12}{2x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2\cdot(2x-5)}{2x-5} + \dfrac{-12}{2x-5}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2 + \dfrac{-12}{2x-5}\right) = -2 + 0 = -2$

Conclusie: knikpunt is (1, 2), perforatie is $(2\frac{1}{2}, 2)$ en horizontale asymptoot links is $y = -2$.
De grafiek rechts van $x = 1$ bestaat uit een horizontale lijn op hoogte $y = 2$ met een perforatie $(2\frac{1}{2}, 2)$.

Asymptoten, perforatie en linkertop

23 *Bereken algebraïsch, dus grafische deel van de rekenmachine mag niet gebruikt worden. Benaderingen zijn wel toegestaan.*

Analyse: $a = 5$ dus $f(x) = \dfrac{4x^2-10x+4}{2x-5}$ *Welke methode is er om scheve asymptoten te bepalen?*

$f(x) = \dfrac{4x^2-10x+4}{2x-5} = \dfrac{2x\cdot(2x-5)+4}{2x-5} = 2x + \dfrac{4}{2x-5}$ dus de scheve asymptoot is $y = 2x$

eerste methode met de hellingshoek:
Voor de hellingshoek α met de positieve x-as geldt: $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}4°$
Conclusie: $\beta \approx 26{,}6°$

tweede methode met vectoren:

De richtingsvector van de verticale asymptoot is $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

De richtingsvector van de scheve asymptoot $y = 2x$ is $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Voor hoek β tussen de vectoren geldt: $\cos(\beta) = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{0+2}{1\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Conclusie: $\beta \approx 26{,}6°$

24 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: top, dus f ′(x) = 0 en "op de y-as", dus x = 0

$f(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 4}{2x - a}$ dus $f'(x) = \dfrac{(8x - 10)(2x - a) - (4x^2 - 10x + 4) \cdot 2}{(2x - a)^2}$

Omdat $x = 0$ en $f'(x) = 0$ geldt $-10 \cdot -a - 4 \cdot 2 = 0$ dus $10 \cdot a - 8 = 0$

Conclusie: $a = \frac{4}{5}$

25 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: perforatie, dus teller en noemer gelijk stellen aan 0. De waarden van a bepalen.
$4x^2 - 10x + 4 = 0$ *en* $2x - a = 0$

$2x - a = 0$ dus $x = \frac{1}{2}a$ invullen in $4x^2 - 10x + 4 = 0$ geeft $a^2 - 5a + 4 = 0$ dus $a = 4$ of $a = 1$

Als $a = 4$ geldt: $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 4}{2x - 4}$

x-coördinaat perforatie: $2x - 4 = 0$ dus $x = 2$
y-coördinaat perforatie bepalen door $f(x)$ te herschrijven.

$f(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 4}{2x - 4} = \dfrac{2x(2x - 4) - 2x + 4}{2x - 4} = 2x + \dfrac{-2x + 4}{2x - 4} = 2x + \dfrac{-1 \cdot (2x - 4)}{2x - 4}$

Dus $f(x) = 2x - 1$ mits $x \neq 2$. Dus y-coördinaat perforatie is $y = 3$
Conclusie: coördinaten perforatie zijn dus $x = 2$ en $y = 3$
Opmerking: de grafiek van f is voor a = 4 de rechte lijn y = 2x – 1 met een perforatie in (2, 3)

Gelijke oppervlakte

26 *De oppervlakte van de rechthoek OPQR is 3b. De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee delen met gelijke oppervlakte. Er moet dus gelden:*

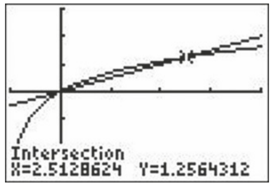
$2 \cdot \int_0^b f(x)\,dx = 3b$ of $\int_0^b f(x)\,dx = \frac{3}{2}b$

De primitieve van $f(x)$ is $3x - 3\ln|x + 1|$ en omdat $x + 1$ positief is geldt:
$\ln|x + 1| = \ln(x + 1)$ en dus

$\int_0^b f(x)\,dx = \left[3x - 3\ln(x + 1)\right]_0^b = 3b - 3\ln(b + 1) = \frac{3}{2}b$

$\ln(b + 1) = \frac{1}{2}b$

Verder oplossen met grafische rekenmachine met de grafiek, de tabel of de solver: voer bijv. de functie $y_1 = \ln(x + 1)$ *en* $y_2 = 0{,}5x$ *in en bepaal met behulp van intersect het snijpunt.*



Conclusie: $b \approx 2{,}51$

Verzameling toppen

27 *De coördinaten van de toppen zijn afhankelijk van de waarde van a. Druk de x-coördinaat en de y-coördinaat van de toppen uit in a en zoek daarna een verband tussen die twee.*
Voor elk van de toppen geldt $f'(x) = 0$ dus $3x^2 + 2ax = 0$

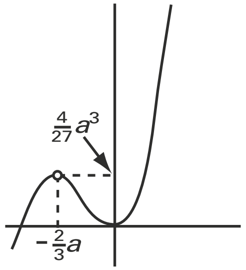
dus $x(3x + 2a) = 0$ dus $x = 0$ of $x = -\frac{2}{3}a$

Omdat $x = -\frac{2}{3}a$ geldt ook $a = -\frac{3}{2}x$

substitueer $a = -\frac{3}{2}x$ in $y = x^3 + ax^2$ geeft

$y = x^3 + -\frac{3}{2}x \cdot x^2 = x^3 - \frac{3}{2}x^3 = -\frac{1}{2}x^3$

Conclusie: de toppen liggen dus op de kromme met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x^3$



Over een parabool gespannen

28 *Bereken waar de raaklijn aan de parabool in R de x-as snijdt.*
$f(x) = 3 - x^2$ dus $f'(x) = -2x$ dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $R(1, 2)$ is $f'(1) = -2$
De vergelijking van de raaklijn is $y = -2x + b$
Punt (1, 2) invullen levert: $y = -2x + 4$
Snijden met de x-as dus $0 = -2x + 4$ dus $x = 2$
Conclusie: x-coördinaat van S is 2
Let op: de vergelijking van de raaklijn is ook direct te bepalen met behulp van transformaties: $y = -2(x - 1) + 2$

29 *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Maak onderscheid tussen de boog QR (met de gegeven formule voor de lengte) en de twee rechte delen (met Pythagoras).*

Rechte delen: $|RS| = |PQ| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$

Boog: $|QR| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (-2x)^2}\,dx$ berekenen met behulp van grafische rekenmachine

levert lengte boog is ongeveer 2,958
Conclusie: totale lengte is ongeveer 7,43
Let op: beschrijf gebruik grafische rekenmachine. Let ook altijd op het gevraagde aantal decimalen.

30 *Exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Oppervlakte driehoek onder RS berekenen met opp. driehoek $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

Snijpunt parabool met x-as berekenen met $3 - x^2 = 0$ levert snijpunt $(\sqrt{3}, 0)$

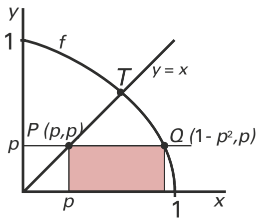
Oppervlakte gebied onder de parabool berekenen met

$\int_1^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\,dx = \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{\sqrt{3}} = \left(3\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}^3\right) - \left(3 - \frac{1}{3}\right) = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\frac{2}{3} = 2\sqrt{3} - 2\frac{2}{3}$

Conclusie: oppervlakte $= 1 - \left(2\sqrt{3} - 2\frac{2}{3}\right) = 3\frac{2}{3} - 2\sqrt{3}$

Tussen twee grafieken

31 *Ga na dat voor Q geldt $y = p$*
eerste methode:
$P(p, p)$ ligt op de grafiek van $y = x$
Voor het punt $P(p, p)$ geldt $x = p$ en $y = p$
dus voor Q geldt ook $y = p$ en dus geldt $p = \sqrt{1-x}$
dus $p^2 = 1 - x$ *en dus* $x = 1 - p^2$
Conclusie: Q heeft de x-coördinaat $x = 1 - p^2$



tweede methode:
Als $x = 1 - p^2$ dan moet gelden $y = p$. Dus moet gelden $f(x) = f(1-p^2) = p$

$f(1-p^2) = \sqrt{1-(1-p^2)} = \sqrt{p^2} = p$ (want $p > 0$)

Conclusie: als voor de x-coördinaat geldt $x = 1 - p^2$ dan geldt voor de y-coördinaat $y = p$

32 *Exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Maximaal, dus afgeleide gelijk stellen aan 0*
Oppervlakte berekenen met: opp. $= l \cdot b = ((1-p^2)-p) \cdot p = p - p^3 - p^2$
Oppervlakte is maximaal als afgeleide gelijk is aan nul, dus als
$y' = 1 - 3p^2 - 2p = 0$ dus $3p^2 + 2p - 1 = 0$

De abc-formule levert $p = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot -1}}{6} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$ dus $p = \frac{1}{3}$ ($p = -1$ vervalt)

Conclusie: $p = \frac{1}{3}$

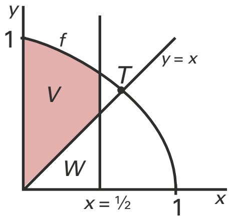
33 *Exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Wentelen om de x-as, gebruik dus $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Inhoud (V en W) $= \pi \cdot \int_0^{½} (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{½} (\sqrt{1-x})^2\,dx$

$= \pi \cdot \int_0^{½} (1-x)\,dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{½} = \frac{3}{8}\pi$

Inhoud $W = \pi \cdot \int_0^{½} (l(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{½} x^2\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{½} = \frac{1}{24}\pi$

Conclusie: Inhoud $V = \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{1}{3}\pi$



Opmerking: aan de foutieve oplossing met $\pi \cdot \int_0^{½} (\sqrt{1-x} - x)^2\,dx$ *zijn bij het examen geen punten toegekend.*

Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

34 *Bereken langs algebraïsche weg, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.*
De lengte van het verticale verbindingsstuk $= f(x) - g(x)$

Als $x = a$ geldt $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$ dus $\frac{a}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{a-1}{a^2} = \frac{1}{6}$ kruislings vermenigvuldigen

geeft $6(a-1) = a^2$ dus $a^2 - 6a + 6 = 0$

Oplossen met abc-formule levert $a = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$ dus

$a = 3 \pm \sqrt{3}$
Conclusie: $a = 3 \pm \sqrt{3}$
Let op: er zijn twee oplossingen

35 *De lengte van het lijnstuk is* $x_g - x_f = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$. *Er moet gebruik gemaakt worden van differentiëren.*

Herschrijf: lengte $= \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$

De afgeleide hiervan is $-\frac{1}{2}b^{-\frac{3}{2}} + b^{-2} = -\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2}$

Dus opgelost moet worden: $-\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2} = 0$ dus $\frac{1}{2b\sqrt{b}} = \frac{1}{b^2}$

kruislings vermenigvuldigen levert $b^2 = 2b\sqrt{b}$ dus $b^2 - 2b^{1\frac{1}{2}} = 0$ dus

$b^{1\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - 2) = 0$ dus $b = 4$ ($b = 0$ vervalt)

of andere methode:

$-\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2} = 0$ rechts en links met b^2 vermenigvuldigen geeft

$-\frac{b^2}{2b\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b^2} = -\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$ dus $b^{\frac{1}{2}} = 2$ dus $b = 4$

De lengte van het horizontale lijnstuk is dan $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Conclusie: de maximale lengte is $\frac{1}{4}$

De vergelijking mag na differentiëren ook met de grafische rekenmachine opgelost worden.

Een regenton

36 *Voor een omwentelingslichaam geldt inhoud* $= \pi \cdot \int_0^h (f(x))^2\,dx$

In deze situatie geldt: inhoud

$= \pi \cdot \int_0^h (r(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{1}{10}\sqrt{5 + 15x - 15x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \frac{1}{100}(5 + 15x - 15x^2)\,dx$

Dus inhoud is $\pi\left[\frac{1}{100}(5x + 7{,}5x^2 - 5x^3)\right]_0^h = \frac{\pi}{100}(5h + 7{,}5h^2 - 5h^3)$

$= \frac{\pi}{100} \cdot 2{,}5 \cdot (2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3)$

37 *Bereken in twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Gebruik de voor V gegeven formule.*
De regenton is 1 meter hoog dus de totale inhoud is

$\frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{\pi}{40}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3) = \frac{\pi}{40} \cdot 3 = \frac{3\pi}{40}$

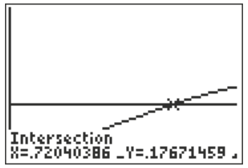
Voor drie vierde deel gevuld dus inhoud is dan $\frac{3}{4} \cdot \frac{3\pi}{40} = \frac{9\pi}{160}$

Opgelost moet worden $\frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{9\pi}{160}$

$y_1 = \frac{\pi}{40}(2x + 3x^2 - 2x^3)$

$y_2 = \frac{9\pi}{160}$

Calculate, Intersect levert $x = h = 0{,}72$
Conclusie: de hoogte is 72 cm (of 0,72 meter)



Acht keer zo groot

38 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Noteer wat bewezen moet worden.*
eerste methode:
Te bewijzen: oppervlakte rechterdeel is $8 \cdot \frac{3}{4}p^4 = 6p^4$

Grenzen bij gegeven buigpunt $x = p$ en gegeven snijpunt x-as bij $x = 3p$

Oppervlakte rechterdeel $= \int_p^{3p} (3px^2 - x^3)\ dx =$

$\left[px^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_p^{3p} = (p \cdot 27p^3 - \frac{1}{4} \cdot 81p^4) - (p \cdot p^3 - \frac{1}{4}p^4) = 27p^4 - 20\frac{1}{4}p^4 - p^4 + \frac{1}{4}p^4) = 6p^4$

Conclusie: oppervlakte rechterdeel is 8 keer zo groot als oppervlakte linkerdeel.

tweede methode:
Te bewijzen: oppervlakte rechterdeel is $8 \cdot \frac{3}{4}p^4 = 6p^4$

Grenzen $x = 0$ en gegeven snijpunt x-as bij $x = 3p$

Oppervlakte totaal $= \int_0^{3p} (3px^2 - x^3)\ dx =$

$\left[px^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{3p} = (p \cdot 27p^3 - \frac{1}{4} \cdot 81p^4) - (p \cdot 0^3 - \frac{1}{4}0^4) = 27p^4 - 20\frac{1}{4}p^4 - p^4 + \frac{1}{4}p^4) = 6\frac{3}{4}p^4$

Oppervlakte rechterdeel $= 6\frac{3}{4}p^4 - \frac{3}{4}p^4 = 6p^4$

Conclusie: oppervlakte rechterdeel is 8 keer zo groot als oppervlakte linkerdeel.
Opmerking: vergeet de haakjes in de integraal niet.

39 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.*
Er moet gelden: lengte BO = lengte AO
Lengte BO: afstand tussen $O(0, 0)$ en $B(p, 2p^3)$ berekenen met Pythagoras:

$BO = \sqrt{p^2 + (2p^3)^2} = \sqrt{p^2 + 4p^6}$

Lengte $AO = 3p$
Dus moet opgelost worden $\sqrt{p^2 + 4p^6} = 3p$

$\sqrt{p^2 + 4p^6} = 3p$ kwadrateren geeft $p^2 + 4p^6 = 9p^2$ dus $8p^2 - 4p^6 = 0$ dus

$4p^2(2 - p^4) = 0$
Dus $p = 0$ (valt af) of $p = \sqrt[4]{2}$
Conclusie: $p = \sqrt[4]{2}$

40 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Noteer wat bewezen moet worden.*
Te bewijzen: lengte CA is 8 keer lengte OC
Buigraaklijn $y = ax + b$ opstellen in punt $B(p, 2p^3)$: $f_p(x) = 3px^2 - x^3$ dus

$f_p'(x) = 6px - 3x^2$

Dus richtingscoëfficiënt in buigpunt is $a = f_p'(p) = 6p \cdot p - 3p^2 = 3p^2$

Buigraaklijn $y = 3p^2x + b$ door punt $B(p, 2p^3)$ levert $2p^3 = 3p^2 \cdot p + b$ dus $b = -p^3$

Buigraaklijn $y = 3p^2x - p^3$ snijden met de x-as, dus

$3p^2x - p^3 = 0 \Leftrightarrow 3p^2x = p^3 \Leftrightarrow x = \frac{p^3}{3p^2} = \frac{p}{3} = \frac{1}{3}p$

Dus lengte $OC = x = \frac{1}{3}p$

Lengte $CA = OA - OC = 3p - \frac{1}{3}p = 2\frac{2}{3}p$

$2\frac{2}{3}p = \frac{8}{3}p = 8 \cdot \frac{1}{3}p$

Conclusie: lengte CA is 8 keer lengte OC

Kromme van middens

41 Snijpunt $A(4, 2)$
eerste manier:
Oppervlakte V =
oppervlakte rechthoek $OPAB$ – gebied onder de grafiek tussen $x = 0$ en $x = 4$

Oppervlakte $V = 4 \cdot 2 - \int_0^4 \sqrt{x}\ dx = 8 - \left[\frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{3}$

tweede manier:
Oppervlakte $V = \int_0^2 y^2\ dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

derde manier met de grafische rekenmachine:
bijvoorbeeld
TI-84: 8 – fn Int($\sqrt{x}$,x,0,4) = 2,67 (menu MATH punt 9)
of

CASIO: 8 –∫($\sqrt{x}$,0,4) = 2,67 (kies in menu RUN achtereenvolgens OPTN, CALC, ∫dx)
Conclusie: oppervlakte is $2\frac{2}{3} \approx 2{,}67$

42 Omdat $y = \sqrt{x}$ en $y = q$ geldt $q = \sqrt{x}$ dus $x = q^2$. Dus het horizontale verbindingslijnstuk heeft als eindpunten $(0, q)$ en (q^2, q).

Het midden van dit lijnstuk is $M\left(\frac{1}{2}q^2, q\right)$

Dus $x = \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}y^2$ dus $2x = y^2$ dus $y = \sqrt{2x}$

of

$M\left(\frac{1}{2}q^2, q\right)$ invullen in $y = \sqrt{2x}$ geeft $q = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}q^2} = \sqrt{q^2}$ en dit klopt voor $q \geq 0$

of
De grafiek van de middens ontstaat uit de grafiek van f door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met een factor 0,5
Conclusie: M ligt op de grafiek van $y = \sqrt{2x}$

43 *Exact, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

De inhoud van het omwentelingslichaam van W is $I = \pi\int_0^2 x^2\ dy$

$y = \sqrt{2x}$ dus $x^2 = \frac{1}{4}y^4$ en dus $I = \frac{1}{4}\pi\int_0^2 y^4\ dy = \frac{1}{4}\pi\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{5}\pi$

Conclusie: 25%
of
De inhoud is te beschouwen als een limiet van een Riemannsom van horizontale cilinderschijfjes. De grafiek van $y = \sqrt{2x}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 0,5.
Dus de straal van elk schijfje wordt gehalveerd, de oppervlakte van elk schijfje wordt dan een vierde deel.
Dit geldt voor elk schijfje op elke hoogte, dus de inhouden verhouden zich als 1 : 4
Conclusie: 25%

Zwaartepunt

44 *Bereken de oppervlakte van V, de grenzen p en q en druk h uit in x.*
h(x) is de vergelijking van lijn AB, dus h(x) = 3 – x
$p = 0$ en $q = 3$

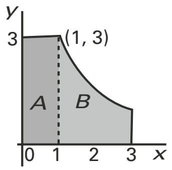
oppervlakte van $\Delta ABC = 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

$\int_p^q (x \cdot h(x))\,dx = \int_0^3 (x(3-x))\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left[1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 13\frac{1}{2} - 9 = 4\frac{1}{2}$

dus $x_z = \frac{1}{4{,}5} \cdot 4{,}5 = 1$ en omdat $x_z = y_z$ geldt $y_z = 1$

Conclusie: zwaartepunt is (1, 1).

45 *Bereken de oppervlakte van V, de grenzen p en q en druk h uit in x voor de twee delen links en rechts van (waarschijnlijk) x = 1.*



grens als $\frac{3}{x} = 3$ dus als $x = 1$

oppervlakte $A = 1 \cdot 3 = 3$

oppervlakte $B = \int_1^3 \frac{3}{x}\,dx = [3 \cdot \ln(x)]_1^3 = 3 \cdot \ln 3$

voor het linker deel A geldt: $\int_0^1 (x \cdot 3)\,dx = \int_0^1 3x\,dx = \left[1\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1\frac{1}{2}$

voor het rechter deel B geldt: $\int_1^3 \left(x \cdot \frac{3}{x}\right)\,dx = \int_1^3 3\,dx = [3x]_1^3 = 6$

Conclusie: $x_z = \frac{1}{3 + 3\ln 3} \cdot \left(1\frac{1}{2} + 6\right) = \frac{7\frac{1}{2}}{3 + 3\ln 3}$.

Onafhankelijk van *n*

46 *Exact, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Grenzen gebied G bepalen en daarna inhoud omwentelingslichaam
bepalen met $I = \pi\,(f(x))^2\,dx$

Grenzen: $\frac{1}{2}x^2 = x$

$x^2 = 2x$ dus $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$ dus $x = 0$ of $x = 2$

inhoud $= \pi\int_0^2 x^2\,dx - \pi\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 x^2\,dx - \pi\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4\right) dx =$

$\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 - \pi\left[\frac{1}{20}x^5\right]_0^2 = \pi\left(\frac{8}{3} - \frac{32}{20}\right) = \frac{16}{15}\pi$

47 *Gevraagd wordt naar de richtingscoëfficiënt in het punt met x = n, dus naar y′(n)*

$y(x) = \frac{1}{n}x^2$ dus $y'(x) = \frac{2}{n}x$ dus $y'(n) = \frac{2}{n} \cdot n = 2$

Conclusie: richtingscoëfficiënt is onafhankelijk van *n*.

48 *Grenzen bepalen, oppervlakte V bepalen en oppervlakte W bepalen.*
Hoekpunt van V is $P_n(n,n)$ dus de grenzen zijn $x = 0$ en $x = n$.

oppervlakte $W = \int_0^n \frac{1}{n}x^2\,dx = \left[\frac{1}{3n}x^3\right]_0^n = \frac{1}{3n} \cdot n^3 = \frac{1}{3}n^2$

oppervlakte $V = n^2 - \frac{1}{3}n^2 = \frac{2}{3}n^2$

Verhouding oppervlakten V en W is $\frac{2}{3}n^2 : \frac{1}{3}n^2 = 2 : 1$

Conclusie: verhouding van de oppervlakten V en W is onafhankelijk van *n*.

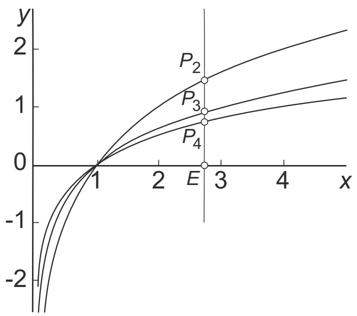
©ThiemeMeulenhoff

3 Exponentiële en logaritmische functies

Een rij van logaritmische functies

Voor $k = 2, 3, 4, \ldots$ en voor $x > 0$ zijn gegeven de functies $f_k(x) = {}^k\log(x)$.
De lijn $x = e$ snijdt de x-as in het punt E en de grafiek van f_k in het punt P_k
In de figuur hiernaast zie je de grafieken van f_2, f_3 en f_4 en daarop de punten P_2, P_3 en P_4.
In de punten P_2, P_3 en P_4, ... worden de raaklijnen aan de grafieken van f_2, f_3 en f_4, ... getekend.

figuur 1



1 Bewijs dat al deze raaklijnen door het punt (0, 0) gaan.

Het midden van lijnstuk EP_k noemen we M_k
Zo ontstaat de rij van middens M_2, M_3, M_4, ...
De figuur suggereert dat M_2 hetzelfde punt zou kunnen zijn als punt P_4

2 Toon aan dat elk van de middens M_2, M_3, M_4, ... op de grafiek van een functie f_k ligt.

Inademen

Bij controlemetingen aan de ademhaling wordt men gevraagd om diep uit te ademen en vervolgens gedurende vijf seconden zo diep mogelijk in te ademen.
Tijdens het inademen is de hoeveelheid verse lucht in de longen een functie van de tijd.
Voor gezonde mensen gebruiken we het volgende model: $L(t) = 3{,}6(1 - e^{-2{,}5t})$.
Hierbij is L de hoeveelheid verse lucht in liters en t de tijd in seconden ($0 \leq t \leq 5$).

De maximale hoeveelheid verse lucht in de longen van gezonde mensen is volgens dit model ongeveer 3,6 liter.

3 Bereken na hoeveel seconden 90% van deze maximale hoeveelheid verse lucht is ingeademd.

Astma is een aandoening aan de luchtwegen. Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat dit maximum bereikt wordt. Voor astmapatiënten gebruiken we het model: $L_\alpha(t) = \alpha \cdot 3{,}6(1 - e^{-2{,}5\alpha t})$.
Hierbij is α een constante tussen 0 en 1 die afhankelijk is van de zwaarte van de astma.

©ThiemeMeulenhoff

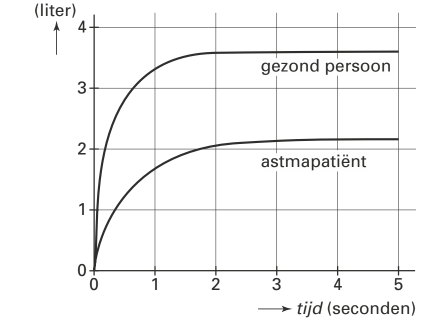
In figuur 2 is de grafiek van de hoeveelheid ingeademde verse lucht getekend voor een gezond persoon en voor een zekere astmapatiënt.

4 Bereken voor deze astmapatiënt α in één decimaal nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

Een gezond persoon heeft na 2 seconden al 99% van de maximale hoeveelheid verse lucht van 3,6 liter ingeademd.
Voor een bepaalde astmapatiënt geldt $\alpha = 0{,}3$.

5 Bereken hoeveel procent van de maximale hoeveelheid verse lucht deze astmapatiënt na 2 seconden heeft ingeademd.

figuur 2



Ga bij de volgende vraag weer uit van de formule $L_\alpha(t) = \alpha \cdot 3{,}6(1 - e^{-2{,}5\alpha t})$.
De snelheid waarmee de hoeveelheid verse lucht toeneemt, is maximaal op het tijdstip $t = 0$.

6 Bereken voor welke waarde van α deze maximale snelheid gelijk is aan 4,5 liter per seconde.

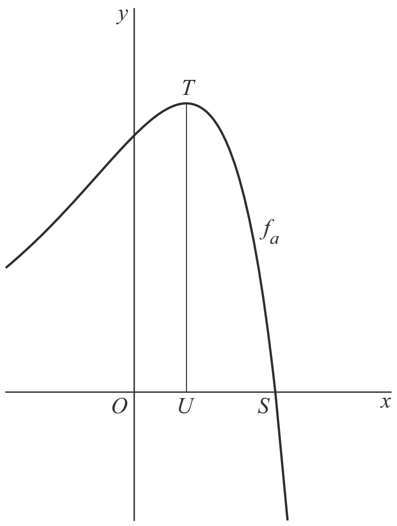
Onveranderlijke lengte

Voor $a > 1$ is de functie f_a gegeven door:

$f_a(x) = a \cdot e^x - e^{2x}$

De grafiek van f_a snijdt de x-as in het punt $S(\ln(a), 0)$. De grafiek van f_a heeft één top: punt T. De loodrechte projectie van T op de x-as is punt U.
U ligt links van S op de x-as. Zie figuur 3.

figuur 3



De x-coördinaten van de punten U en S zijn afhankelijk van de waarde van a.

7 Bewijs dat de lengte van lijnstuk US onafhankelijk is van a.

Natuurlijke logaritme

De grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\ln(x)}}$ heeft een verticale asymptoot.

8 Geef de exacte vergelijking van die asymptoot. (Verklaar je antwoord!)

9 Bepaal algebraïsch de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat e.

Wenteling

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$. De grafiek start in het punt $S(1, 0)$.

10 Laat zien dat de grafiek van f in het startpunt S loodrecht staat op de x-as.

We wentelen de grafiek van f om de x-as. We krijgen dan een omwentelingslichaam.
Gegeven is dat de inhoud van dit omwentelingslichaam tussen $x = 1$ en $x = a$ gelijk is aan π.

11 Bereken de exacte waarde van a.

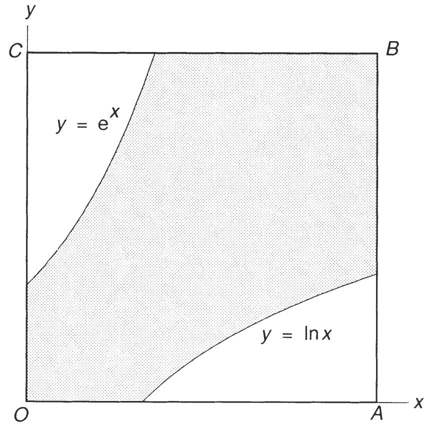
Oppervlakte

In figuur 4 is in een assenstelsel Oxy een vierkant $OABC$ met zijde 3 getekend.
Dit vierkant wordt door de grafieken van $y = e^x$ en $y = \ln(x)$ in drie delen verdeeld.

V is het gebied ingesloten door de x-as, de y-as, de lijn $x = 3$, de lijn $y = 3$ en de twee grafieken.

12 Bereken de oppervlakte V.
Rond je antwoord af op 2 decimalen.

figuur 4

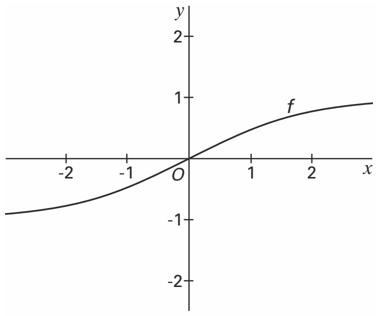


Puntsymmetrisch

In figuur 5 staat de grafiek van de functie

$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

figuur 5



13 Bewijs dat *f* een stijgende functie is.

14 Los op: $0{,}999 < f(x) < 1$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De grafiek van *f* lijkt puntsymmetrisch te zijn ten opzichte van het punt (0, 0).

15 Bewijs langs algebraïsche weg dat inderdaad voor elk getal *a* geldt: $f(-a) = -f(a)$.

Een symmetrische gebroken functie

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \frac{2}{1 + e^x}$.

16 Bereken exact voor welke waarden van *x* geldt: $f(x) < \frac{1}{100}$

$F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ is een primitieve van $f(x) = \frac{2}{1 + e^x}$.

17 Toon dit aan.

Het vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafiek van *f*, de *y*-as, de *x*-as en de lijn $x = \ln(3)$.

18 Bereken exact de oppervlakte van *V* en schrijf je antwoord in de vorm $\ln k$.

Voor elke waarde van *x* geldt: $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$.

19 Toon dit aan.

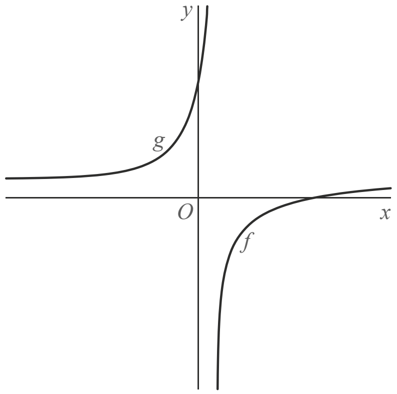
©ThiemeMeulenhoff

Door de asymptoot

Voor $x > \frac{1}{2}$ is de functie *f* gegeven door $f(x) = \ln\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right)$.

De functie *g* is de inverse van *f*.
In figuur 6 zijn de grafieken van *f* en *g* getekend.

figuur 6

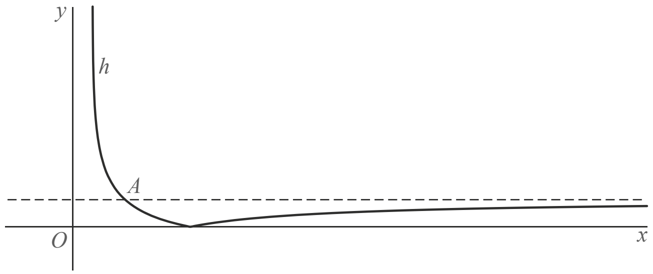


Er geldt: $g(x) = \frac{1 + 2e^x}{2 - e^x}$.

20 Bewijs dit.

De functie *h* is gegeven door $h(x) = |f(x)|$.
In figuur 7 is de grafiek van *h* getekend. De grafiek van *h* heeft een horizontale asymptoot. Deze is in de figuur gestippeld weergegeven.

figuur 7



De grafiek van *h* snijdt de horizontale asymptoot in het punt *A*.

21 Bereken exact de *x*-coördinaat van *A*.

©ThiemeMeulenhoff

Familie exponentiële functies

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is f_n de functie gedefinieerd door $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$

In figuur 8 zijn de grafieken van f_1 tot en met f_5 getekend.

Voor elke n raakt de lijn met vergelijking $y = \frac{e}{n} \cdot x$ de grafiek van f_n.

De volgende vraag gaat over deze eigenschap als $n = 2$.

22 Bewijs dat de lijn $y = \frac{e}{2} \cdot x$ raakt aan de grafiek van $f_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$

l is de lijn met vergelijking $y = 4$.
G_0 is het gebied dat wordt ingesloten door de y-as, de grafiek van f_1 en de lijn l.
Zie figuur 9.

23 Bereken de exacte waarde van de oppervlakte van G_0 .

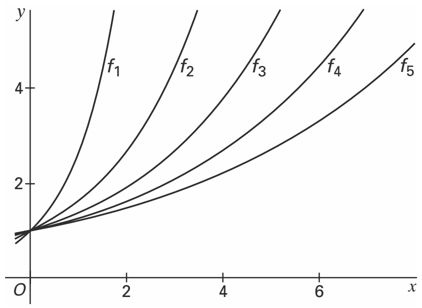
De lijn met vergelijking $y = 3$ snijdt de grafiek van de functie f_n in het punt S_n, en de y-as in het punt S_0. Zie figuur 10.

24 Bewijs dat voor elke n het lijnstuk S_nS_{n+1} even lang is als het lijnstuk S_0S_1.

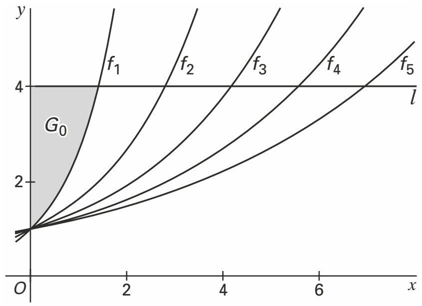
Voor elke n is G_n het gebied dat wordt ingesloten door lijn l en de grafieken van f_n en f_{n+1}.

25 Toon aan dat voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ de oppervlakten van G_n gelijk zijn.

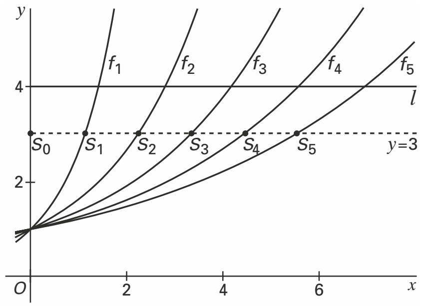
figuur 8



figuur 9



figuur 10



Verzameling toppen

Gegeven zijn de functies $f_k(x) = \frac{\ln(kx)}{x}$ met $k \neq 0$.

Neem $k = 1$.

26 Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f_1.

Voor elke waarde van $k \neq 0$ heeft de grafiek van f_k één top.
De top van de grafiek van f_1 ligt op de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{x}$.

27 Bewijs dat voor elke waarde van $k \neq 0$ de top van de grafiek van f_k op de kromme $y = \frac{1}{x}$ ligt.

De waarde van k wordt zodanig gekozen, dat de grafiek van f_k de lijn $y = 1$ snijdt in de punten A en B. De lengte van het lijnstuk AB hangt af van de keuze van k.

28 Wat is de kleinste gehele waarde van k waarvoor de lengte van AB groter is dan 2? Licht je antwoord toe.

Onafhankelijk van *a*

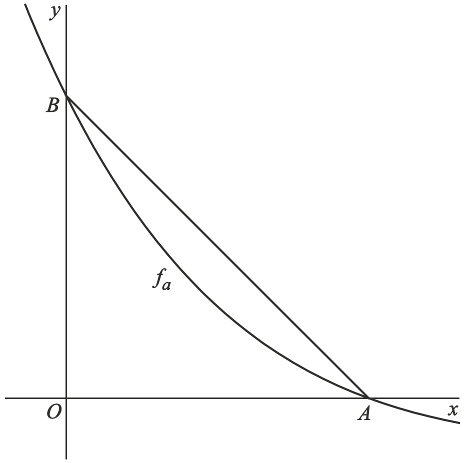
Voor elke positieve waarde van a is een functie f_a gegeven door $f_a(x) = (1 - ax) \cdot e^{-ax}$ en een functie F_a gegeven door $F_a(x) = x \cdot e^{-ax}$.

De functie F_a is een primitieve functie van f_a.

29 Toon dit aan.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in punt $A(\frac{1}{a}, 0)$ en de y-as in punt $B(0, 1)$.
Zie figuur 11.

figuur 11



De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

30 Bewijs dat de verhouding van de oppervlakten van deze twee delen onafhankelijk is van a.

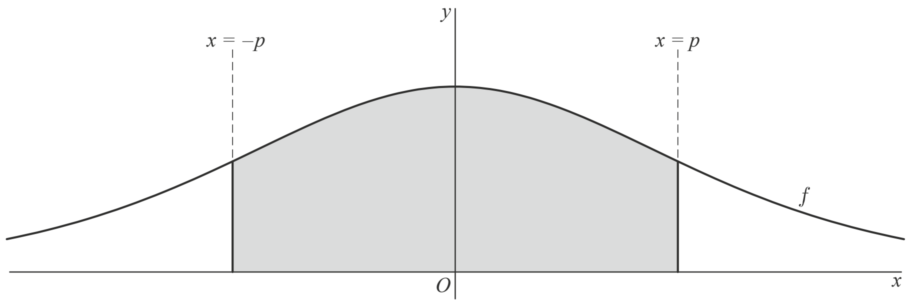
Symmetrisch gebied

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

Gegeven is p, met $p > 0$. In de figuur is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijking $x = -p$ en $x = p$ grijs gemaakt.

figuur



De oppervlakte van dit gebied noemen we $A(p)$.

Een primitieve F van f wordt gegeven door $F(x) = \frac{-1}{e^x + 1}$.

Er geldt: $A(p) = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$

31 Bewijs met behulp van de gegeven primitieve functie dat inderdaad geldt:

$A(p) = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$

Als p onbegrensd toeneemt, nadert $A(p)$ tot een limietwaarde L.
Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ de helft is van L.

32 Bereken exact deze waarde van p.

Medicijn in actieve vorm

Sommige medicijnen kennen een passieve en een actieve vorm. Ze worden in passieve vorm ingespoten en door het lichaam omgezet in actieve vorm.

De hoeveelheid medicijn in passieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten nog niet is omgezet in actieve vorm, noemen we $p(t)$. Als 25 mg wordt ingespoten, geldt de volgende formule:

$p(t) = 25 \cdot e^{-k \cdot t}$

Hierbij is k een positieve constante waarvan de waarde afhangt van het type medicijn. Hoe groter k, hoe sneller het medicijn in passieve vorm wordt omgezet in actieve vorm.

Om de werkzaamheid van het medicijn te onderzoeken, meet men hoe lang het duurt tot 99% van de hoeveelheid medicijn in passieve vorm is omgezet naar medicijn in actieve vorm. Deze tijdsduur t_{99} hangt af van k.

33 Druk t_{99} uit in k.

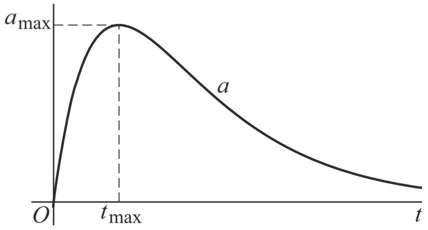
Het medicijn in actieve vorm wordt door de lever afgebroken. De omzetting van medicijn in passieve vorm naar medicijn in actieve vorm en de afbraak van medicijn in actieve vorm vinden gelijktijdig plaats.

Een patiënt krijgt een injectie met een dergelijk medicijn. De hoeveelheid medicijn in actieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten in het lichaam zit, noemen we $a(t)$. Voor $a(t)$ geldt:

$a(t) = 25(e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-0{,}4 \cdot t})$

In figuur 12 is de grafiek van a getekend.

figuur 12

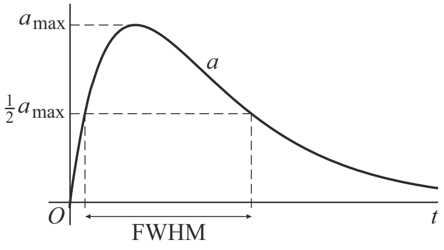


Het maximum van a noemen we a_{max}. Dit maximum wordt aangenomen op tijdstip t_{max}.

34 Bereken t_{max} met behulp van differentiëren.

Als maat voor de tijdsduur die een medicijn werkzaam is, wordt gekeken naar de zogenoemde FWHM (*Full Width at Half Maximum*). Dat is de breedte van de piek in de grafiek van a ter hoogte van $\frac{1}{2}a_{max}$. Anders gezegd: de FWHM geeft aan hoe lang de hoeveelheid medicijn in actieve vorm in het lichaam minstens 50% is van de maximale hoeveelheid a_{max}.
In figuur 13 is de FWHM aangegeven.

figuur 13



35 Bereken de FWHM in uren nauwkeurig.

De formule van Gompertz

Verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen maken bij het berekenen van de premies en uitkeringen een schatting van de levensverwachting van verzekerden. Daarbij wordt vaak een formule gebruikt waarvan de vorm gebaseerd is op de resultaten van een onderzoek uit 1825 van de verzekeringswiskundige Benjamin Gompertz (1779 - 1865).

Voor een levensverzekering die op een leeftijd van 40 jaar afgesloten wordt, hanteerde een verzekeringsmaatschappij in de 19e eeuw de volgende formule van Gompertz om het percentage nog levende verzekerden met een bepaalde leeftijd te schatten:

$P(t) = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

Hierin is $t \geq 40$ en geeft $P(t)$ aan welk percentage van de mensen die zo'n verzekering afsloten minstens t jaar oud wordt.

36 Bereken hoeveel jaar na het afsluiten van de levensverzekering volgens deze formule de helft van de polishouders is overleden.

De gegeven formule is ook te schrijven in de vorm $P(t) = 100 \cdot e^{m-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$.

37 Bereken langs algebraïsche weg de waarde van m. Rond je antwoord af op twee decimalen.

De algemene formule van Gompertz heeft de vorm $P(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}$, met positieve waarden van a, b en k.

Een eigenschap van deze algemene formule is:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot e^{kt}$$

Hierin hangt de waarde van c af van de waarden van b en k.

38 Druk c uit in b en k.

Hoogwaterstanden

Onder invloed van de maan ontstaan eb en vloed. Een periode van eb en vloed duurt 12 uur en 25 minuten en de hoogste waterstand gedurende zo'n periode heet een hoogwaterstand. Elke periode van eb en vloed levert dus één hoogwaterstand op.

Om in te schatten hoe groot de risico's bij hoogwaterstanden zijn, stelt men op grond van een groot aantal metingen een formule op. Deze formule is van de vorm

$f(h) = 10^{a-b \cdot h}$, met a en b constanten.

Hierin is h de hoogte in meters boven NAP en $f(h)$ het gemiddeld aantal keren per jaar dat een hoogwaterstand de waarde van h overschrijdt.

In Hoek van Holland geldt voor hoogwaterstanden tussen 0,9 m en 2,5 m boven NAP: $a = 4{,}3$ en $b = 1{,}9$.

39 Bereken welke waarde van h volgens de formule gemiddeld één keer per jaar wordt overschreden. Rond je antwoord af op één decimaal.

Als de zeespiegel, en daarmee ook de hoogwaterstanden, 0,1 m zou stijgen, zou dit leiden tot een groter gemiddeld aantal keren per jaar dat de waarde $h = 2{,}5$ in Hoek van Holland wordt overschreden.

40 Bereken hoeveel keer zo groot dit gemiddeld aantal keren zou zijn.

Metingen tonen aan dat de waarden $a = 4{,}3$ en $b = 1{,}9$ voor $h > 2{,}5$ tot te kleine waarden van $f(h)$ leiden. Men vermoedt dat een hoogwaterstand van 3,9 meter boven NAP, zoals bij de watersnoodramp in Zuidwest-Nederland in 1953, gemiddeld ongeveer eens per 100 jaar voorkomt.
Volgens de formule zou dat maar eens per 1288 jaar zijn.

We zoeken daarom nieuwe waarden voor a en b, die aan de volgende voorwaarden voldoen:
- $h = 2{,}5$ levert dezelfde waarde van $f(h)$ op als met de oude waarden voor a en b het geval was;
- $h = 3{,}9$ levert voor $f(h)$ de waarde 0,01 op.

41 Bereken de nieuwe waarden van a en b. Rond deze waarden af op één decimaal.

Helderheid van sterren

Aan de sterrenhemel bevinden zich heldere en minder heldere sterren. De helderheid van een ster werd in de oudheid reeds aangegeven met een getal, de magnitude van de ster. Zeer heldere sterren kregen magnitude 1. Nauwelijks zichtbare sterren kregen magnitude 6. Een kleine waarde betekent dus een grote helderheid. In deze opgave is m de magnitude.

Tegenwoordig meet men de hoeveelheid licht die van een ster wordt ontvangen.
De helderheid van een ster wordt dan vaak uitgedrukt in lux (een eenheid voor verlichtingssterkte). In deze opgave is L de helderheid in lux.

In de tabel staan voor een aantal helderheden de waarden van m en L.

tabel

m	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
L	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	$4{,}0 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$	$6{,}3 \cdot 10^{-8}$	$2{,}5 \cdot 10^{-8}$	$1{,}0 \cdot 10^{-8}$

Tussen L en m bestaat een exponentieel verband van de vorm $L = 10^{p+qm}$.

42 Leid uit de tabelgegevens bij $m = 1{,}0$ en $m = 6{,}0$ af dat $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$.

Voor L geldt dus: $L = 10^{-5{,}6-0{,}4m}$.

In het sterrenbeeld Steenbok bevindt zich een optische dubbelster: twee sterren die met het blote oog als één object worden waargenomen. Na meting blijkt dat voor de ene ster geldt $m = 4{,}30$ en voor de andere ster $m = 3{,}58$. De waarde van L van de optische dubbelster is de som van de L-waarden van de afzonderlijke sterren.

43 Bereken de magnitude van de optische dubbelster. Rond je antwoord af op één decimaal.

L is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand x (in meters) van de ster tot de aarde: $L = \frac{C}{x^2}$, waarbij C een constante is.

Er geldt het volgende verband:

$m(x) = -14{,}0 - 2{,}5\log(C) + 5{,}0\log(x)$

44 Bewijs dit.

Momenteel is de afstand x van de ster Aldebaran tot de aarde $6{,}3 \cdot 10^{17}$ meter.

Deze afstand neemt toe met $1{,}7 \cdot 10^{12}$ meter per jaar, dus $\frac{dx}{dt} = 1{,}7 \cdot 10^{12}$ m/j.

Door deze verwijdering verandert ook de helderheid van de ster en dus ook de magnitude m.
De snelheid waarmee m verandert kan worden berekend met de afgeleide van m als functie van de tijd t (in jaren).

Voor deze afgeleide $\frac{dm}{dt}$ geldt:

$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

45 Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de magnitude m van Aldebaran op dit moment verandert.

Hints bij hoofdstuk 3

1 Raaklijn $y = ax + b$ bepalen voor $x = e$.

2 Het gaat om twee verschillende grafieken, dus twee verschillende waarden k.

3 Er is 90% van de maximale hoeveelheid verse lucht ingeademd. Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

4 Maak gebruik van de gegevens in de grafiek.

5 De maximale hoeveelheid verse lucht is $3{,}6\alpha$.

6 Snelheid, dus bereken L'. Gegeven is dat de maximale snelheid is 4,5 op $t = 0$. Welke vergelijking moet opgelost worden?

7 Alleen x_U hoeft berekend te worden, want de coördinaten van S zijn gegeven.

8 Verticale asymptoot, dus noemer = 0

9 Raaklijn $y = ax + b$ bepalen voor $x = e$.

10 Loodrecht op de x-as, dus de rc van de raaklijn moet verticaal lopen.

11 Maak gebruik van de formule $\int \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]$

12 Bereken en twee decimalen, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.

13 Stijgend, dus toon aan dat $f'(x)$ voor elke waarde positief is.

14 Los op en twee decimalen, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan. Splits de ongelijkheid op in twee delen.

15 Laat zien dat $f(-a) = -f(a)$. Maak bijv. gebruik van kruislings vermenigvuldigen.

16 Maak een vergelijking of ongelijkheid en los deze algebraïsch op.

17 De afgeleide van $F(x)$ moet $f(x)$ opleveren.

18 Oppervlakte berekenen, dus gebruik de gegeven primitieve. Gebruik de rekenregels voor logaritmen. Maak een schets van de situatie.

19 Bedenk wat $f(-x)$ betekent.

20 Inverse dus bewijs $f(g(x)) = x$ of spiegel f in de lijn $y = x$ (dus verwissel in de formule de x en de y) en bewijs dat dit g wordt.

21 Herschrijf de formule eerst zonder absoluutstrepen en bereken de horizontale asymptoot.

22 Raken dus $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.

23 Maak een schets. De gevraagde oppervlakte = oppervlakte rechthoek – oppervlakte onder de grafiek van f.

24 Er wordt gevraagd naar de lengte van een horizontaal lijnstuk. $y = 3$ snijden met f_n en ook met f_{n+1} geeft de x-coördinaten van de snijpunten uitgedrukt in n.

25 Maak een schets ter verduidelijking van de vraag.

26 Exact, dus de grafische rekenmachine is niet toegestaan. Top dus $f'(x) = 0$. Gebruik de quotiëntregel.

27 Top dus $f'(x) = 0$ bepalen. Druk de coördinaten van de top uit in k en controleer of de top op de gegeven kromme ligt.

28 Neem als voorbeeld een waarde voor k en bepaal met de grafische rekenmachine de lengte van AB. Probeer nog een paar waarden voor k en zoek met insluiten de kleinste gehele waarde voor k.

29 F_a is een primitieve van f_a dus andersom geldt: de afgeleide van F_a moet gelijk zijn aan f_a.

30 Het gaat om de verhouding van de twee oppervlakten. Bereken de oppervlakte van het deel onder grafiek met behulp van de primitieve van het vorige onderdeel, daarna oppervlakte van het deel boven de grafiek met behulp van een driehoek.

31 Maak gebruik van de gegeven primitieve $F(x)$. De opgave is eenvoudiger te bewijzen als ook gebruik gemaakt wordt van de symmetrie.

32 Bereken eerst de limietwaarde L. Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

33 Bij t_{99} is er 99% omgezet in actieve vorm. Let op: $p(t)$ is de formule voor de passieve vorm. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.

34 Bereken eerst de afgeleide. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.

35 Bepaal eerst de maximale waarde. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden. Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.

36 Bedenk welk percentage minstens t jaar oud wordt. Maak een vergelijking en los deze op.

37 Maak een vergelijking en los deze algebraïsch op. Gebruik de rekenregels.

38 Bepaal de afgeleide en het quotiënt. Gebruik de kettingregel.

39 a, b en $f(h)$ zijn bekend. Vul deze waarden in de formule in en los de vergelijking op.

40 Vergelijk het aantal overschrijdingen van $h = 2{,}4$ (vóór de stijging) met het aantal overschrijdingen van $h = 2{,}5$ (ná de stijging).

41 Bereken eerst $f(2{,}5)$ met de oude waarden voor a en b. Gebruik deze uitkomst en $f(3{,}9) = 0{,}01$.

42 Maak een stelsel van vergelijkingen door uit te gaan van de tabelgegevens bij $m = 1{,}0$ en $m = 6{,}0$.

43 Bereken eerst bij de gegeven m waarden de bijbehorende L waarden. Wat wordt nu de L waarde van de dubbelster?

44 Maak gebruik van de rekenregels van logaritmes.

45 Gebruik de gegeven formule voor $m(x)$ en bedenk dat C een constante is.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 3

Rij van logaritmische functies

1 *raaklijn $y = ax + b$, dus $f(x)$ en $f'(x)$ bepalen voor $x = e$.*

$f_k(x) = {}^k\log(x)$ dus $y = f_k(\mathrm{e}) = {}^k\log(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\ln(k)} = \dfrac{1}{\ln(k)}$ dus raakpunt is $\left(\mathrm{e}, \dfrac{1}{\ln(k)}\right)$

$f_k'(x) = \dfrac{1}{x\ln(k)}$ dus $a = f_k'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\ln(k)}$

$\left(\mathrm{e}, \dfrac{1}{\ln(k)}\right)$ invullen in raaklijn $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}\ln(k)}x + b$

$\dfrac{1}{\ln(k)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}\ln(k)}\mathrm{e} + b$ dus $\dfrac{1}{\ln(k)} = \dfrac{1}{\ln(k)} + b$ dus $b = 0$

vergelijking raaklijn wordt $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}\ln(k)}x$

Conclusie: al deze raaklijnen gaan door (0, 0)

2 *Het midden M_{k_1} van EP_{k_1} uitdrukken in k_1. Onderzoek of er een andere k is zodat M op de grafiek van f_k ligt.*

E is (e, 0) en P_{k_1} is $(\mathrm{e}, {}^{k_1}\log(\mathrm{e}))$ dus M_{k_1} is $(\mathrm{e}\ ;\ 0{,}5 \cdot {}^{k_1}\log(\mathrm{e}))$

M_{k_1} is $(\mathrm{e}\ ;\ 0{,}5 \cdot {}^{k_1}\log(\mathrm{e}))$ invullen in $f_{k_2}(x) = {}^{k_2}\log(x)$ dus $0{,}5 \cdot {}^{k_1}\log(\mathrm{e}) = {}^{k_2}\log(\mathrm{e})$

$0{,}5 \cdot \dfrac{\log(\mathrm{e})}{\log(k_1)} = \dfrac{\log(\mathrm{e})}{\log(k_2)}$ dus $\dfrac{0{,}5}{\log(k_1)} = \dfrac{1}{\log(k_2)}$ dus $0{,}5\log(k_2) = \log(k_1)$ dus $\log(k_2) = 2 \cdot \log(k_1)$

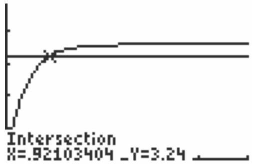
dus $k_2 = k_1^2$.

Bijv. voor $P_3 = (\mathrm{e}, {}^3\log(\mathrm{e}))$ geldt $M_3 = (\mathrm{e}\ ;\ 0{,}5 \cdot 3\log(\mathrm{e}))$ ligt op $f_9(x) = {}^9\log(x)$
Conclusie: elk van de middens ligt op de grafiek van een functie f_k.

Inademen

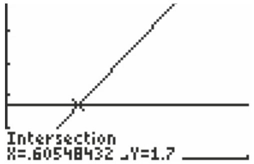
3 *Bereken, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan. $L(t)$ is de hoeveelheid verse lucht die ingeademd is. Er is 90% van de maximale hoeveelheid verse lucht ingeademd, dus 90% van 3,6 liter, dus 3,24 liter. De op te lossen vergelijking is dus* $3{,}6(1 - \mathrm{e}^{-2{,}5t}) = 3{,}24$ *of* $1 - \mathrm{e}^{-2{,}5t} = 0{,}90$.
Geef duidelijk aan hoe je de grafische rekenmachine gebruikt, bijvoorbeeld:

$y_1 = 3{,}6(1 - \mathrm{e}^{-2{,}5t})$ en $y_2 = 3{,}24$, WINDOW: [0, 5] x [0, 5]



intersect geeft $t \approx 0{,}92$ of $t \approx 0{,}9$
Conclusie: na ongeveer 0,9 seconden is 90% van de maximale hoeveelheid lucht ingeademd.

4 *De vergelijking bevat nu drie variabelen L, t en α.*
eerste methode:
Twee van deze variabelen, L en t, kunnen weggewerkt worden door de coördinaten van een punt van de grafiek uit de figuur in te vullen, bijvoorbeeld $t = 1$ en $L = 1{,}7$. Hierdoor houd je een vergelijking met één variabele over, deze vergelijking is oplosbaar.
$t = 1$ en $L = 1{,}7$ invullen in $L_\alpha(t) = \alpha \cdot 3{,}6(1 - \mathrm{e}^{-2{,}5\alpha t})$ levert
$1{,}7 = \alpha \cdot 3{,}6(1 - \mathrm{e}^{-2{,}5\alpha})$
Geef duidelijk aan hoe je de grafische rekenmachine gebruikt, bijvoorbeeld:
$y_1 = \alpha \cdot 3{,}6(1 - \mathrm{e}^{-2{,}5\alpha})$ en $y_2 = 1{,}7$, WINDOW: [0, 2] x [0, 5], intersect.
Conclusie: $\alpha \approx 0{,}6$



tweede methode:
Voor een grote waarde van t geldt $e^{-2,5t} = 0$ dus $1 - e^{-2,5t} = 1$ dus
$\alpha \cdot 3{,}6(1 - e^{-2,5\alpha t}) = 3{,}6 \cdot \alpha$ is de maximale hoeveelheid lucht.
Uit de figuur is af te lezen dat maximale hoeveelheid lucht in de longen voor een astmapatiënt ongeveer 2,2 liter is, dus geldt $3{,}6\alpha = 2{,}2$.
Conclusie: $\alpha \approx 0{,}6$

5 Voor deze astmapatiënt geldt: maximale hoeveelheid verse lucht is
$3{,}6 \cdot \alpha = 3{,}6 \cdot 0{,}3 = 1{,}08$
Hoeveelheid na 2 sec. ingeademde lucht is $L(2) = 0{,}3 \cdot 3{,}6(1 - e^{-2,5 \cdot 0,3 \cdot 2}) \approx 0{,}84$

Conclusie: gevraagde percentage is $\frac{0{,}84}{1{,}08} \cdot 100\% \approx 78\%$

of

$$\frac{L(2)}{\text{maximum}} \cdot 100\% = \frac{0{,}3 \cdot 3{,}6(1 - e^{-2,5 \cdot 0,3 \cdot 2})}{0{,}3 \cdot 3{,}6} \cdot 100\% = (1 - e^{-2,5 \cdot 0,3 \cdot 2}) \cdot 100\% \approx 78\%$$

Conclusie: gevraagde percentage is 78%

6 *Snelheid is L'. Gegeven is: maximale snelheid = 4,5 liter/sec op tijdstip $t = 0$.*
Dus de op te lossen vergelijking is $L'_\alpha(0) = 4{,}5$
Let op bij differentiëren: eerst haakjes wegwerken en t is de variabele, niet α.

$L_\alpha(t) = \alpha \cdot 3{,}6(1 - e^{-2,5\alpha t}) = \alpha \cdot 3{,}6 - \alpha \cdot 3{,}6 \cdot e^{-2,5\alpha t}$

$L'_\alpha(t) = -\alpha \cdot 3{,}6 \cdot e^{-2,5\alpha t} \cdot -2{,}5\alpha = \alpha^2 \cdot 9 \cdot e^{-2,5\alpha t}$

$L'_\alpha(0) = \alpha^2 \cdot 9 \cdot e^{-2,5\alpha \cdot 0} = \alpha^2 \cdot 9 \cdot 1$

$L'_\alpha(0) = 4{,}5$ dus $9\alpha^2 = 4{,}5$ dus $\alpha \approx 0{,}71$

Conclusie: $\alpha \approx 0{,}71$

Onveranderlijke lengte

7 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Gevraagd wordt $x_S - x_U$. Aangezien x_S bekend is, hoeft alleen x_U berekend te worden.
$x_U = x_{Top}$ en bereken x_{Top} exact met behulp van de afgeleide van $f_a(x)$

$f_a(x) = a \cdot e^x - e^{2x}$ *dus* $f'_a(x) = a \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}$

x_{Top} *berekenen:* $a \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x} = 0$ *dus* $e^x(a - 2 \cdot e^x) = 0$ *dus* $a - 2 \cdot e^x = 0$

(want $e^x \neq 0$)

Dus $e^x = \frac{a}{2}$ *en* $x_{Top} = \ln\left(\frac{a}{2}\right)$

Dus $x_U = x_{Top} = \ln\left(\frac{a}{2}\right)$ *en* $x_S = \ln(a)$ *dus*

$x_S - x_U = \ln(a) - \ln\left(\frac{a}{2}\right) = \ln(a) - (\ln(a) - \ln(2)) = \ln(2)$

Conclusie: de lengte van lijnstuk US is onafhankelijk van de waarde van a.

Opmerking: andere methoden om $x_S - x_U$ te berekenen zijn:

$x_S - x_U = \ln(a) - \ln\left(\frac{a}{2}\right) = \ln(a) - \left(\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

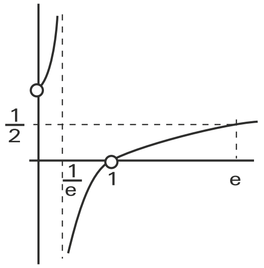
$x_S - x_U = \ln(a) - \ln\left(\frac{a}{2}\right) = \ln(a) - \ln\left(\frac{1}{2}a\right) = \ln\left(\frac{a}{\frac{1}{2}a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \ln(2)$

©ThiemeMeulenhoff

Natuurlijke logaritme

8 *In het geval van een verticale asymptoot geldt: noemer van quotiënt is gelijk aan 0*

noemer $= 1 + \frac{1}{\ln(x)} = 0$ dus $\ln(x) = -1$ dus $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$



Conclusie: asymptoot bij $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Ga na dat

$\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = 1$ dus de grafiek heeft perforatie in (0, 1)

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = 0$ dus de grafiek heeft perforatie in (1, 0)

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = 1$ dus de grafiek heeft horizontale asymptoot $y = 1$

9 *Raaklijn $y = ax + b$ bepalen.*
Dus a bepalen met $f'(x)$ dus $a = f'(e)$.
b bepalen behulp van het raakpunt $(e, f(e))$

$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)^{-1}$

$f'(x) = -\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)^{-2} \cdot -1 \cdot (\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x}$ (kettingregel)

$f'(e) = -\left(1 + \frac{1}{\ln(e)}\right)^{-2} \cdot -1 \cdot (\ln(e))^{-2} \cdot \frac{1}{e} = -(1+1)^{-2} \cdot -1 \cdot (1)^{-2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{4e}$

dus raaklijn: $y = \frac{1}{4e} \cdot x + b$ en nu de b bepalen met behulp van het raakpunt $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.

dus $\frac{1}{2} = \frac{1}{4e} \cdot e + b$ dus $b = \frac{1}{4}$

Conclusie: vergelijking raaklijn is $y = \frac{1}{4e} \cdot x + \frac{1}{4}$

Wenteling

10 *De richting van de x-as in het punt S(1, 0) is 0. We moeten dus laten zien dat de grafiek van f verticaal vanuit het punt S(1, 0) vertrekt.*
Bepaal dus $f'(1)$.

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

$f'(1) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(1)}} \to \infty$ bestaat niet, dus loopt de grafiek van f verticaal.

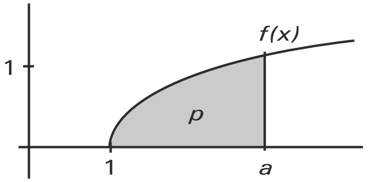
De x-as loopt horizontaal.

Conclusie: de grafiek van f staat loodrecht op de x-as.

©ThiemeMeulenhoff

11 *Gevraagd wordt voor welke waarde van a geldt:*

$$\pi\int_1^a y^2\,dx = \pi\int_1^a (f(x))^2\,dx = \pi\int_1^a \left(\sqrt{\ln(x)}\right)^2\,dx = \pi\int_1^a \ln(x)\,dx = \pi$$



Primitieve van $\ln(x)$ is $x\cdot\ln(x) - x$ dus

$$\pi\int_1^a \ln(x)\,dx = \pi\cdot\left[x\cdot\ln(x) - x\right]_1^a = \pi\cdot(a\cdot\ln(a) - a + 1)$$

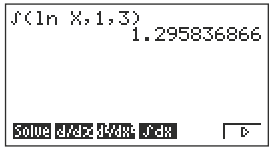
$\pi\cdot(a\cdot\ln(a) - a + 1) = \pi$
$a\cdot\ln(a) - a + 1 = 1$
$a\cdot(\ln(a) - 1) = 0$ dus $a = 0$ (vervalt) of $a = \mathrm{e}$
Conclusie: $a = \mathrm{e}$

Oppervlakte

12 *Twee decimalen, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.*
Er is bekend: y = ln(x) snijdt de x-as in x = 1 en snijdt de lijn x = 3 (lijnstuk AB) in y = ln(3). De oppervlakte van het witte deel rechtsonder is nu te berekenen. De oppervlakte van het witte deel linksboven is even groot.

oppervlakte witte deel rechtsonder = $\int_1^3 \ln(x)\,dx = 1{,}2958$

grafische rekenmachine
TI-84: druk op MATH, kies hier 9: fnInt(voer in (functie,variabele, ondergrens, bovengrens)
CASIO: in RUN-menu druk op knop OPTN kies optie CALC



Conclusie: oppervlakte gevraagde grijze deel =
$3\cdot 3 - 2\cdot 1{,}2958 \approx 6{,}41$.
Antwoord kan ook gevonden worden met behulp van

$$\int_1^3 \ln(x)\,dx = \left[x\ln(x) - x\right]_1^3$$

Puntsymmetrisch

13 *Als een functie overal stijgend is dan is de afgeleide overal positief zijn. Bepaal dus eerst de afgeleide van f(x).*
f is een gebroken functie dus gebruik de quotiëntregel om f′ te bepalen.

Noem: $T(x) = \mathrm{e}^x - 1$ en $N(x) = \mathrm{e}^x + 1$

$$f'(x) = \frac{T'(x)\cdot N(x) - T(x)\cdot N'(x)}{(N(x))^2} =$$

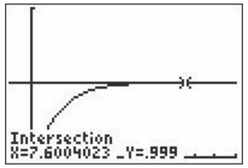
$$\frac{\mathrm{e}^x\cdot(\mathrm{e}^x+1) - (\mathrm{e}^x-1)\cdot\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

teller: $\mathrm{e}^x > 0$ dus $2\mathrm{e}^x > 0$

noemer: $\mathrm{e}^x > 0$ dus $\mathrm{e}^x + 1 > 1$ dus $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 1$
Conclusie: teller en noemer van het quotiënt zijn beide voor elke x groter dan nul, dus is het quotiënt voor elke x groter dan nul, dus is f een stijgende functie.

14 *Twee decimalen, dus het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan.*
0,999 < f(x) < 1 splitsen in 0,999 < f(x) en f(x) < 1
Voor welke x geldt: $0{,}999 < f(x)$

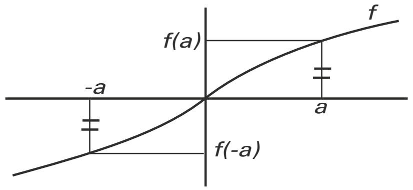
$0{,}999 < \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ dus



$0{,}999(\mathrm{e}^x + 1) < \mathrm{e}^x - 1$ dus $-0{,}001\mathrm{e}^x < -1{,}999$
$\mathrm{e}^x > 1999$ dus $x > \ln 1999$
$x > 7{,}60$ *(x = 7,60 mag ook met de grafische rekenmachine bepaald worden)*
Voor welke x geldt: $f(x) < 1$
Voor elke x geldt: $\mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x + 1$ dus
de teller is kleiner dan de noemer.
Het quotiënt is dus altijd kleiner dan 1.
Conclusie: $x > 7{,}60$

15 *Puntsymmetrie: er moet dus gelden dat f(–a) = –f(a)*
Vul a en –a in en kijk of de gelijkheid f(–a) = –f(a) klopt.

$\dfrac{\mathrm{e}^{-a} - 1}{\mathrm{e}^{-a} + 1} = -\dfrac{\mathrm{e}^{a} - 1}{\mathrm{e}^{a} + 1}$ kruislings vermenigvuldigen

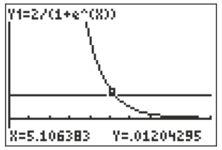


$(\mathrm{e}^{-a} - 1)(\mathrm{e}^{a} + 1) = -(\mathrm{e}^{a} - 1)(\mathrm{e}^{-a} + 1)$
$\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^a - 1 = -\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a} + 1$
$\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^a = -\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}$ klopt
Conclusie: $f(-a) = -f(a)$

Een symmetrische gebroken functie

16 *Exact, dus grafische rekenmachine mag niet gebruikt worden. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.*

$\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{100}$ *kruislings vermenigvuldigen geeft* $200 = 1 + \mathrm{e}^x$



dus $\mathrm{e}^x = 199$ *dus* $x = \ln(199)$

Een plot van f(x) levert een dalende grafiek

Conclusie: $x > \ln 199$

Let op: grafische rekenmachine mag wel gebruikt worden om de grafiek van f(x) te plotten.

17 *De afgeleide van F(x) moet f(x) opleveren. De afgeleide van ln(x) is* $\frac{1}{x}$. *Gebruik de kettingregel.*

$F(x) = 2x - 2\ln(1 + \mathrm{e}^x)$

$$F'(x) = 2 - \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x = \frac{2}{1} - \frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{2\cdot(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{2\cdot\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{2 + 2\cdot\mathrm{e}^x - 2\cdot\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

$$= \frac{2}{1+\mathrm{e}^x} = f(x) \text{ dus } F'(x) = f(x)$$

Conclusie: F(x) is een primitieve van f(x)

18 *Oppervlakte berekenen, dus de gegeven primitieve gebruiken. Gebruik de rekenregels voor logaritmen. Maak een schets van de situatie.*

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{2}{1+e^x}\,dx = [2x - 2\cdot\ln(1+e^x)]_0^{\ln(3)} = (2\cdot\ln(3) - 2\cdot\ln(1+e^{\ln(3)})) - (-2\cdot\ln(1+e^0))$$

$$(2\cdot\ln(3) - 2\cdot\ln(4)) - (-2\cdot\ln(2)) = \ln(3^2) - \ln(4^2) + \ln(2^2) = \ln(9) - \ln(16) + \ln(4) =$$

$$\ln\left(\frac{9\cdot 4}{16}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

of via andere tussenstappen

$(2\cdot\ln(3) - 2\cdot\ln(4)) - (-2\cdot\ln(2)) = 2\cdot\ln(3) - 2\cdot\ln(2^2) + 2\cdot\ln(2) = 2\cdot\ln(3) - 4\cdot\ln(2) + 2\cdot\ln(2) =$

$2\cdot\ln(3) - 2\cdot\ln(2) = 2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$

Let op: het antwoord moet in de vorm ln(k) geschreven worden.
Gebruikt zijn de rekenregels: $\ln(e^a) = a$; $a\cdot\ln(b^c) = c\cdot a\cdot\ln(b)$ *en* $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

19 *Bedenk wat f(–x) betekent.*

$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$ *en* $f(-x) = \frac{2}{1+e^{-x}} = \frac{2}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1+\frac{1}{e^x}}\cdot\frac{e^x}{e^x} = \frac{2\cdot e^x}{e^x+1} = \frac{2\cdot e^x}{1+e^x}$

$f(x) + f(-x) = \frac{2}{1+e^x} + \frac{2\cdot e^x}{1+e^x} = \frac{2+2\cdot e^x}{1+e^x} = \frac{2(1+e^x)}{1+e^x} = 2$

Conclusie: $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 1$

Door de asymptoot

20 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: gebruik voor het aantonen van inverse functies óf f(g(x)) = x óf verwissel in de het functievoorschrift van f(x) de x en y en herleid deze formule op y.
eerste methode toon aan f(g(x)) = x:
Ga na $f(g(x)) = x$
Vervang de x in $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$ door $\frac{1+2e^x}{2-e^x}$

$2x - 1$ wordt dan dus $2\left(\frac{1+2e^x}{2-e^x}\right) - 1$, herschrijven tot $\frac{2+4e^x}{2-e^x} - \frac{2-e^x}{2-e^x} = \frac{5e^x}{2-e^x}$

$x + 2$ wordt dan $\frac{1+2e^x}{2-e^x} + 2$, herschrijven tot $\frac{1+2e^x}{2-e^x} + 2 = \frac{1+2e^x}{2-e^x} + \frac{4-2e^x}{2-e^x} = \frac{5}{2-e^x}$

$$\frac{\left(\frac{5e^x}{2-e^x}\right)}{\left(\frac{5}{2-e^x}\right)} = \frac{5e^x}{2-e^x}\cdot\frac{2-e^x}{5} = \frac{5e^x}{5} = e^x$$

Dus geldt $f(g(x)) = \ln(e^x) = x$.

Conclusie: g is de inverse van f.

tweede methode verwissel in de functie van f de x en y (spiegelen in de lijn y = x) en herschrijf tot y = ...:

Herleid $x = \ln\left(\frac{2y-1}{y+2}\right)$ op y

$x = \ln\left(\frac{2y-1}{y+2}\right)$ dus $e^x = \frac{2y-1}{y+2}$ *herschrijf de breuk zodat er maar één y overblijft*

$\frac{2y-1}{y+2} = \frac{2(y+2)-5}{y+2} = 2 - \frac{5}{y+2}$

dus $e^x = 2 - \frac{5}{y+2}$ dus $\frac{5}{y+2} = 2 - e^x$ dus $y + 2 = \frac{5}{2-e^x}$ dus $y = \frac{5}{2-e^x} - 2$ dus

$y = \frac{5}{2-e^x} - \frac{4-2e^x}{2-e^x} = \frac{1+2e^x}{2-e^x} = g(x)$

Conclusie: g is de inverse van f.

derde methode verwissel in de functie van f de x en y (spiegelen in de lijn y = x) en herschrijf tot y = ...:

Herleid $x = \ln\left(\frac{2y-1}{y+2}\right)$ op y

$x = \ln\left(\frac{2y-1}{y+2}\right)$ dus $e^x = \frac{2y-1}{y+2}$ kruislings vermenigvuldigen geeft

$(y+2)\cdot e^x = 2y - 1$ dus $y\cdot e^x + 2\cdot e^x = 2y - 1$ dus $y\cdot e^x - 2y = -1 - 2\cdot e^x$ dus

$y(e^x - 2) = -1 - 2\cdot e^x$

$y = \frac{-1-2e^x}{e^x-2} = \frac{1+2e^x}{-e^x+2} = \frac{1+2\cdot e^x}{2-e^x} = g(x)$

Conclusie: g is de inverse van f.

21 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: schrijf het functievoorschrift van h(x) zonder absoluutstrepen. Stel de vergelijking van de asymptoot op en bepaal het snijpunt met h(x).

Functievoorschrift rechter deel $h(x) = \left|\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)\right| = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$

Functievoorschrift linker deel

$h(x) = \left|\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)\right| = -\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln\left(\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^{-1}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)$

$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-5}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2}$ voor grote waarde van x gaat $2 - \frac{5}{x+2}$ naar 2

dus voor de horizontale asymptoot* van h geldt $y = \ln(2)$

Voor A geldt: $\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \ln(2)$ dus $\frac{x+2}{2x-1} = 2$ dus $x + 2 = 4x - 2$

Conclusie: $x_A = \frac{4}{3}$

**Opmerking: horizontale asymptoot is ook te berekenen met*

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \ln\left(\frac{2-0}{1+0}\right) = \ln(2)$$

Opmerking: in deze opgave is het resultaat van de vorige opgave niet gebruikt.

Familie van exponentiële functies

22 *We moeten bewijzen dat de grafiek van lijn* $y=\frac{e}{2}\cdot x$ *de grafiek van* $f_2(x)=e^{\frac{x}{2}}$ *raakt.*

Dat wil zeggen dat de twee grafieken in hetzelfde punt dezelfde richting hebben.

Er geldt: $e^{\frac{x}{2}}=\frac{e}{2}x$ (*want raakpunt*) en $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\frac{e}{2}$ (*want dezelfde richting*)

De vergelijking $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\frac{e}{2}$ *oplossen geeft:* $e^{\frac{x}{2}}=e$ dus $\frac{x}{2}=1$ dus als $x=2$ dan hebben y en $f_2(x)$ dezelfde richting

Kijk nu of de twee grafieken door hetzelfde punt (2, y) gaan.

rechte lijn: $y=\frac{e}{2}y=\frac{e}{2}\cdot 2=e$ en $f_2(2)=e^{\frac{2}{2}}=e$

Conclusie: de lijn raakt de grafiek van f in punt (2, e)

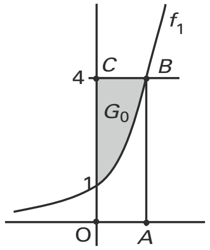
23 *De oppervlakte van* G_0 *is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek OABC min de oppervlakte van het witte deel. De oppervlakte van het witte deel is exact te bepalen met behulp van een integraal. We moeten dan eerst de bovengrens, de x-coördinaat van B berekenen.*

x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f_1 en de lijn l:

$e^x=4$ dus $x=\ln(4)$

Oppervlakte wit = $\int_0^{\ln(4)} e^x\,dx=[e^x]_0^{\ln(4)}=4-1=3$

Oppervlakte rechthoek $OABC=4\cdot\ln(4)$
Conclusie: oppervlakte $G_0=4\cdot\ln(4)-3$



24 *Er wordt gevraagd naar de lengte van een horizontaal lijnstuk.*
Ga na $S_0=(0,3)$ *en* $S_1=(\ln(3),3)$.
De x-coördinaten van de snijpunten S_n *en* S_{n+1} *moeten bepaald worden.*

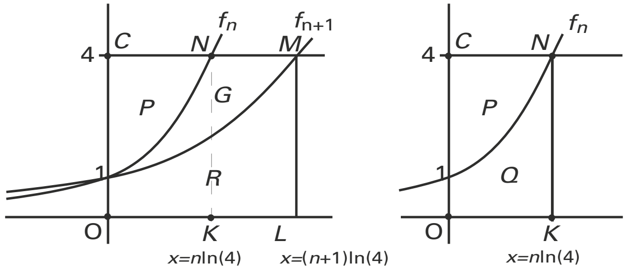
Voor snijpunt S_n geldt $e^{\frac{x}{n}}=3$ dus $e^x=3^n$ dus $x=\ln(3^n)=n\cdot\ln(3)$

Voor snijpunt S_{n+1} geldt $e^{\frac{x}{n+1}}=3$ dus $e^x=3^{n+1}$ dus $x=\ln(3^{n+1})=(n+1)\cdot\ln(3)$
De horizontale afstand tussen S_n en S_{n+1} is dus $(n+1)\cdot\ln(3)-n\cdot\ln(3)=\ln(3)$
Conclusie: de horizontale afstand tussen S_n en S_{n+1} is voor elke x even groot.

25 *Gevraagd wordt de oppervlakte tussen lijn l: y = 4 en de twee grafieken van* f_n *en* f_{n+1} *te bepalen. Gebruik een schets zoals hieronder.*
opp. G = opp. OLMC – opp. R – opp. P moet berekend worden.
De x-coördinaten van de punten M en punt N zijn hierbij nodig.

De x-coördinaat van M: $e^{\frac{x}{n+1}}=4$ dus $e^x=4^{n+1}$ dus $x=\ln(4^{n+1})=(n+1)\cdot\ln(4)$

De x-coördinaat van N: $e^{\frac{x}{n}}=4$ dus $e^x=4^n$ dus $x=\ln(4^n)=n\cdot\ln(4)$
oppervlakte G = oppervlakte $OLMC$ – oppervlakte P – oppervlakte R



©ThiemeMeulenhoff

oppervlakte P = oppervlakte $OKNC$ – oppervlakte $Q=n\cdot\ln(4)\cdot 4-\int_0^{n\ln(4)} e^{\frac{x}{n}}\,dx$

$\text{opp}_Q=\int_0^{n\ln(4)} e^{\frac{x}{n}}\,dx=\left[n\cdot e^{\frac{x}{n}}\right]_0^{n\ln(4)}=n\cdot e^{\frac{n\ln(4)}{n}}-n\cdot 1=n\cdot e^{\ln(4)}-n=4n-n=3n$

dus geldt $\text{opp}_P=4\cdot n\cdot\ln(4)-3n$

$\text{opp}_R=\int_0^{(n+1)\ln(4)} e^{\frac{x}{n+1}}\,dx=\left[(n+1)e^{\frac{x}{n+1}}\right]_0^{(n+1)\ln(4)}=(n+1)e^{\frac{(n+1)\ln(4)}{n+1}}-(n+1)\cdot 1=$

$(n+1)e^{\ln(4)}-(n+1)=4(n+1)-(n+1)=3(n+1)$
oppervlakte $OLMC=(n+1)\cdot\ln(4)\cdot 4=4(n+1)\cdot\ln(4)$
oppervlakte $G=4(n+1)\cdot\ln(4)-(4\cdot n\cdot\ln(4)-3n)-3(n+1)=4\cdot\ln(4)-3$
Conclusie: de oppervlakte van G_n is steeds gelijk aan $4\cdot\ln(4)-3$ en dus onafhankelijk van n.

Verzameling toppen

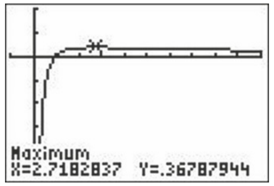
26 *Bereken exact de coördinaten van de top, dus bereken eerst f′(x) = 0*

$f_1(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ dus $f_1'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$f'(x)=0$ als $1-\ln(x)=0$ dus $x=e$

$f_1(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$ *controleer met de grafische rekenmachine*

Conclusie: coördinaten van de top zijn $(e,\frac{1}{e})$



27 *Top bepalen, dus bereken eerst f′(x) = 0*
eerste methode:

$f_k(x)=\frac{\ln(kx)}{x}$ dus $f_k'(x)=\frac{x\cdot\frac{k}{kx}-1\cdot\ln(kx)}{x^2}=\frac{1-\ln(kx)}{x^2}$

$f'(x)=0$ als $1-\ln(kx)=0$ dus $kx=e$ dus $x=\frac{e}{k}$

$f_1\left(\frac{e}{k}\right)=\frac{\ln\left(k\cdot\frac{e}{k}\right)}{\frac{e}{k}}=\frac{\ln(e)}{\frac{e}{k}}=\frac{1}{\frac{e}{k}}=\frac{k}{e}=y$ dus $y=\frac{1}{x}$ *want* $\frac{k}{e}=\frac{1}{\left(\frac{e}{k}\right)}$

Conclusie: coördinaten van de top liggen op $y=\frac{1}{x}$

tweede methode:

$f'(x)=0$ als $1-\ln(kx)=0$ (zie eerste methode) dus $\ln(kx)=1$

substitueer dit in $f_k(x)=\frac{\ln(kx)}{x}\Rightarrow y_T=\frac{1}{x}$

Conclusie: coördinaten van de top liggen op $y=\frac{1}{x}$

©ThiemeMeulenhoff

28 Coördinaten van de top zijn $\left(\frac{e}{k}, \frac{k}{e}\right)$ en

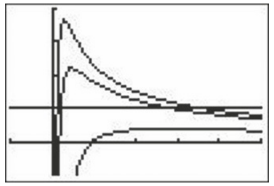
$f_k(x) = 1$ heeft alleen oplossingen als $y_{top} = \frac{k}{e} \geq 1$ dus als $k \geq e$

Bepaal de kleinste hele waarde voor k zodat de afstand tussen twee oplossingen van $f_k(x) = \frac{\ln(kx)}{x} = 1$ groter is dan 2.

Onderzoek met de grafische rekenmachine voor welke k de afstand tussen de snijpunten A en B groter is dan 2. Plot enkele grafieken bijv.

$y = \frac{\ln(x)}{x}$, $y = \frac{\ln(6x)}{x}$, $y = \frac{\ln(10x)}{x}$ en de lijn $y = 1$ om te zien wat er gebeurt.

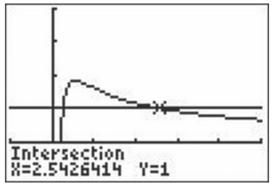
Nu wordt duidelijk dat een grotere waarde van k een grotere afstand tussen A en B levert.



$y = 1$ en $y = \frac{\ln(4x)}{x}$ geeft als snijpunten

$x \approx 2{,}2$ en $x \approx 0{,}4$ dus afstand $AB < 2$ voor $k = 4$

$y = 1$ en $y = \frac{\ln(5x)}{x}$ geeft als snijpunten



$x \approx 2{,}5$ en $x \approx 0{,}3$ dus afstand $AB > 2$ voor $k = 5$

Conclusie: $k = 5$ is de kleinste hele waarde waarvoor afstand AB groter is dan 2.

Onafhankelijk van *a*

29 *F_a is een primitieve van f_a dus andersom geldt: de afgeleide van F_a moet gelijk zijn aan f_a*

$F_a(x) = x \cdot e^{-ax}$ differentiëren met productregel en kettingegel

Eerst $y = e^{-ax}$ differentiëren levert $y' = e^{-ax} \cdot -a$ (kettingregel) dus

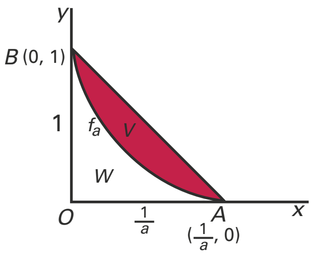
$F_a'(x) = f_a(x) = 1 \cdot e^{-ax} + x \cdot e^{-ax} \cdot -a = 1 \cdot e^{-ax} + -ax \cdot e^{-ax} = (1 - ax) \cdot e^{-ax}$ (productregel)

Conclusie: de afgeleide van F_a is gelijk aan f_a dus F_a is een primitieve van f_a

30 *eerste methode:*

Oppervlakte W van deel onder grafiek berekenen met $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx$,

daarna oppervlakte van deel V boven grafiek berekenen.



Oppervlakte $W = \int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \int_0^{1/a} (1 - ax) \cdot e^{-ax}\,dx = [x \cdot e^{-ax}]_0^{1/a} = \frac{1}{a} \cdot e^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{a \cdot e}$

Oppervlakte driehoek $OAB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Oppervlakte V = oppervlakte driehoek OAB − oppervlakte $W = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a \cdot e}$

Oppervlakte W : oppervlakte driehoek $V = \frac{1}{a \cdot e} : \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a \cdot e}\right) = \frac{\frac{1}{a \cdot e}}{\frac{1}{2a} - \frac{1}{a \cdot e}} \cdot \frac{a}{a} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}}$

Conclusie: de verhouding is onafhankelijk van a

tweede methode:

Oppervlakte van deel onder grafiek berekenen met $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx$*, daarna oppervlakte van de driehoek berekenen.*

Oppervlakte $W = \int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \int_0^{1/a} (1 - ax) \cdot e^{-ax}\,dx = [x \cdot e^{-ax}]_0^{1/a} = \frac{1}{a} \cdot e^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{a \cdot e}$

Oppervlakte driehoek $OAB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Oppervlakte W : oppervlakte driehoek $OAB = \frac{1}{a \cdot e} : \frac{1}{2a} = \frac{\frac{1}{ae}}{\frac{1}{2a}} = \frac{1}{ae} \cdot \frac{2a}{1} = \frac{2a}{ae} = \frac{2}{e}$

Deze verhouding opp. W : opp. OAB is onafhankelijk van a

Conclusie: de gevraagde verhouding is ook onafhankelijk van a

Symmetrisch gebied

31 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Analyse: de primitieve is gegeven. De oppervlakte van het gevraagde gebied is*

$A(p) = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx = [F(x)]_{-p}^{p}$

eerste methode:

$A(p) = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx = [F(x)]_{-p}^{p} = \left[\frac{-1}{e^x + 1}\right]_{-p}^{p} = \frac{-1}{e^p + 1} - \frac{-1}{e^{-p} + 1} = \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{1}{e^{-p} + 1}$

Omdat $\frac{1}{e^{-p} + 1} = \frac{1}{e^{-p} + 1} \cdot \frac{e^p}{e^p} = \frac{e^p}{1 + e^p}$ geldt:

$A(p) = \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{1}{e^{-p} + 1} = \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{e^p}{e^p + 1} = \frac{-1 + e^p}{e^p + 1}$

Dus $A(p) = \frac{-1 + e^p}{e^p + 1} = \frac{(e^p + 1) - 2}{e^p + 1} = \frac{e^p + 1}{e^p + 1} + \frac{-2}{e^p + 1} = 1 + \frac{-2}{e^p + 1} = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$

Conclusie: $A(p) = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$

tweede methode, maak gebruik van symmetrie:

$A(p) = \int_{-p}^{p} f(x)\,dx = 2 \cdot [F(x)]_0^p = 2 \cdot \left[\frac{-1}{e^x + 1}\right]_0^p = 2 \cdot \left(\frac{-1}{e^p + 1} - \frac{-1}{e^0 + 1}\right) =$

$2 \cdot \left(\frac{-1}{e^p + 1} + \frac{1}{1 + 1}\right) = \frac{-2}{e^p + 1} + 1 = 1 + \frac{-2}{e^p + 1}$

Conclusie: $A(p) = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$

Opmerking: een formule voor de oppervlakte is gegeven. Deze formule kan in de volgende opgave gebruikt worden.

32 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Maak gebruik van het gegeven uit de vorige opgave: $A(p) = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$

Analyse: bepaal eerst de limietwaarde L. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.

$L = \lim_{p \to \infty}\left(1 - \frac{2}{e^p + 1}\right) = 1 - 0 = 1$

Dus moet gelden $1 - \frac{2}{1 + e^p} = \frac{1}{2}$ dus $1 + e^p = 4$ dus $e^p = 3$

Conclusie: de gevraagde waarde is $p = \ln(3)$

Medicijn in actieve vorm

33 *p(t) is de formule voor de hoeveelheid medicijn die nog niet is omgezet in actieve vorm, dus p(t) is de hoeveelheid medicijn in passieve vorm aanwezig.*
Als $t = t_{99}$ *dan is 99% van het passieve medicijn omgezet in actief medicijn, dus is er nog 1% passief medicijn aanwezig.*

Als $t = t_{99}$ dan is 99% van 25 mg omgezet in actief medicijn, dus is er nog 1% van 25 mg passief medicijn aanwezig oftewel $0{,}01 \cdot 25$.

Dus op tijdstip t_{99} geldt $p(t_{99}) = 25 \cdot e^{-k \cdot t_{99}} = 0{,}01 \cdot 25$
$e^{-k \cdot t_{99}} = 0{,}01$
$-k \cdot t_{99} = \ln(0{,}01) = \ln(10^{-2}) = -2 \cdot \ln(10)$

$t_{99} = \frac{-2 \cdot \ln(10)}{-k} = \frac{2 \cdot \ln(10)}{k} = \frac{4{,}6}{k}$

Opmerking: of een gelijkwaardige uitdrukking, bijvoorbeeld $t_{99} = \frac{\ln(0{,}01)}{-k}$ *of* $t_{99} = \frac{\ln(100)}{k}$

34 *Bereken met behulp van differentiëren, dus de afgeleide moet gebruikt worden.*
Bereken, dus grafische rekenmachine mag gebruikt worden.

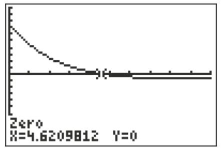
$a(t) = 25(e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-0{,}4 \cdot t})$

$a'(t) = 25(-0{,}1 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} - -0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t})$

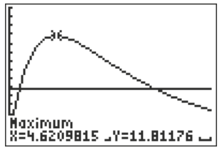
maximaal als $25(-0{,}1 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}) = 0$

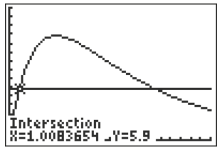
$y_1 = 25\left(-0{,}1 \cdot e^{(-0{,}1 \cdot x)} + 0{,}4 \cdot e^{(-0{,}4 \cdot x)}\right)$

Oplossen met Calculate, Zero levert $t = 4{,}6$

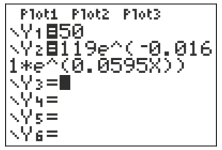


35 *Bereken, dus grafische rekenmachine is toegestaan.*
Top als $t = 4{,}6$ invullen in $a(t) = 25(e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-0{,}4 \cdot t})$levert maximale waarde 11,8
De helft van de hoogte zit op 5,9
Opgelost moet worden $25(e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-0{,}4 \cdot t}) = 5{,}9$
$y_1 = 25(e^{-0{,}1 \cdot x} - e^{-0{,}4 \cdot x})$
$y_2 = 5{,}9$
Oplossen met Calculate, Intersect levert $t = 1{,}0$ en $t = 14{,}3$ uur
Conclusie: de FWHM is ongeveer 13 uur.
Opmerking: de top mag ook gevonden worden met Calculate, Max (zie schermafbeelding)





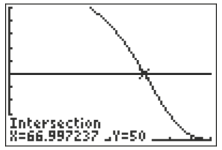
De formule van Gompertz



36 *Bereken, dus grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.
De helft is overleden dus 50 % leeft nog, oftewel $P(t) = 50$

$50 = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$ oplossen met grafische rekenmachine

levert $t = 67$ jaar.
De verzekering wordt op 40 jarige leeftijd afgesloten.
Conclusie: 27 jaar na het afsluiten van de verzekering is de helft van de polishouders overleden.



37 *Bereken langs algebraïsche weg, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode:

$119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 100 \cdot e^{m - 0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

$119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 100 \cdot e^{m} \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$ dus $119 = 100 \cdot e^m$ dus $e^m = 1{,}19$
dus $m = \ln(1{,}19)$
Conclusie: $m = 0{,}17$

tweede methode:
$119 = 100 \cdot 1{,}19 = 100 \cdot e^{\ln(1.19)} \approx 100 \cdot e^{0{,}1740}$

$P(t) = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} \approx 100 \cdot e^{0{,}1740} \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 100 \cdot e^{0{,}1740 - 0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$
Conclusie: $m = 0{,}17$
Let op het gevraagde aantal decimalen.

38 *Gebruik de kettingregel.*
$P(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}$

de afgeleide van $y = -b \cdot e^{kt}$ is $y' = -b \cdot k \cdot e^{kt}$ dus $P'(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot k \cdot e^{kt}$

$\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot k \cdot e^{kt}}{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}} = -b \cdot k \cdot e^{kt}$

Conclusie: $c = -bk$

Hoogwaterstanden

39 *Bereken en rond af, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.*
Gegeven $a = 4{,}3$ en $b = 1{,}9$ en $f(h) = 1$ (gemiddeld 1 keer per jaar wordt de hoogwaterstand h overschreden)
Opgelost moet worden $10^{4{,}3 - 1{,}9h} = 1$ dus $4{,}3 - 1{,}9h = 0$ dus $h = \frac{4{,}3}{1{,}9} = 2{,}26$
Conclusie: $h = 2{,}3$ meter
Opmerking: in plaats van algebraïsch oplossen mag ook de grafische rekenmachine (Calc Intersect) gebruikt worden.

40 *Bereken en rond af, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Als het water stijgt, wordt de hoogte h = 2,5 vaker overschreden. Vergelijk het aantal overschrijdingen van h = 2,4 (vóór de stijging) met het aantal overschrijdingen van h = 2,5 (ná de stijging).*
De hoogte $h = 2{,}4$ wordt een aantal keren (k) overschreden. Als het waterniveau met 0,1 stijgt, zal in deze nieuwe situatie de hoogte $h = 2{,}5$ hetzelfde aantal keren (k) overschreden worden. De hoogte $h = 2{,}5$ zal in de nieuwe situatie vaker overschreden worden dan de hoogte $h = 2{,}5$ in de oude situatie.
Oude situatie: $h = 2{,}4$ levert $f(2{,}4) = 10^{4{,}3 - 1{,}9 \cdot 2{,}4} = 0{,}5495$ is dus $f(2{,}5)$ in de nieuwe situatie
Oude situatie: $h = 2{,}5$ levert $f(2{,}5) = 10^{4{,}3 - 1{,}9 \cdot 2{,}5} = 0{,}3548$ is dus $f(2{,}5)$ in de oude situatie
Conclusie: $h = 2{,}5$ in de nieuwe situatie zal dus $\frac{0{,}5459}{0{,}3548} = 1{,}5$ keer vaker overschreden worden.

41 *Bereken en rond af, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Noteer de vergelijkingen die opgelost moeten worden.*
$f(2{,}5)$ levert dezelfde uitkomst op als met de oude waarden van $a = 4{,}3$ en $b = 1{,}9$
dus $f(2{,}5) = 10^{4{,}3-1{,}9\cdot 2{,}5} = 0{,}3548$
In de nieuwe situatie geldt dus $f(2{,}5) = 10^{a-b\cdot 2{,}5} = 0{,}3548$
Dus geldt $a - b \cdot 2{,}5 = \log(0{,}3548) = -0{,}45 \Leftrightarrow a = 2{,}5 \cdot b - 0{,}45$
Ook geldt: $f(3{,}9) = 0{,}01$
In de nieuwe situatie geldt dus $f(3{,}9) = 10^{a-b\cdot 3{,}9} = 0{,}01$.
Dus geldt $a - b \cdot 3{,}9 = \log(0{,}01) = -2$
Dus geldt $a = 3{,}9 \cdot b - 2$

Dus $\left.\begin{array}{l} a = 3{,}9 \cdot b - 2 \\ a = 2{,}5 \cdot b - 0{,}45 \end{array}\right\} \Rightarrow 3{,}9 \cdot b - 2 = 2{,}5 \cdot b - 0{,}45 \Leftrightarrow 1{,}4 \cdot b = 1{,}55 \Leftrightarrow b = 1{,}11$

Invullen levert $a = 2{,}33$
Conclusie: $a = 2{,}3$ en $b = 1{,}1$

Helderheid van sterren

42 *Leid af, dus de waarden p = –5,6 en q = –0,4 mogen niet ingevuld worden. Noteer de vergelijking (hier een stelsel van vergelijkingen) die opgelost moet worden.*
eerste methode:
De formule $L = 10^{p+qm}$ levert, samen met $m = 1{,}0$ en $L = 10^{-6}$, de vergelijking
$10^{-6} = 10^{p+q}$, dus $p + q = -6$
De formule $L = 10^{p+qm}$ levert, samen met $m = 6{,}0$ en $L = 10^{-8}$, de vergelijking
$10^{-8} = 10^{p+6q}$, dus $p + 6q = -8$
$p = -6 - q$ invullen in $p + 6q = -8$ levert $(-6 - q) + 6q = -8$ levert $5q = -2$ dus $q = -0{,}4$
Dus $p = -6 - q = -6 + 0{,}4 = -5{,}6$
Conclusie: $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$
Let op: gebruik m = 1,0 en m = 6,0. Gebruik van (alleen) andere m-waarden leidt tot puntenaftrek.
Opmerking: een formule voor L is gegeven. Deze formule kan in de volgende opgave(n) gebruikt worden.

tweede methode:
Een exponentieel verband heeft de vorm $L = b \cdot g^m$
Gebruik $(m, L) = (1{,}0;\ 10^{-6})$ en $(m, L) = (6{,}0;\ 10^{-8})$

Voor de groeifactor g geldt $g^5 = \dfrac{10^{-8}}{10^{-6}} = 10^{-2}$ en dus $g = \left(10^{-2}\right)^{\frac{1}{5}} = 10^{-\frac{2}{5}} = 10^{-0{,}4}$

Dus geldt $L = b \cdot g^m = b \cdot \left(10^{-0{,}4}\right)^m = b \cdot 10^{-0{,}4\cdot m}$ en neem bijvoorbeeld $m = 1{,}0$ en $L = 10^{-6}$ om b te berekenen,

dus $10^{-6} = b \cdot 10^{-0{,}4}$ en dus $b = \dfrac{10^{-6}}{10^{-0{,}4}} = 10^{-5{,}6}$

dus $L = 10^{-5{,}6} \cdot 10^{-0{,}4\cdot m} = 10^{-5{,}6-0{,}4m}$
Conclusie: $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$

Let op: gebruik m = 1,0 en m = 6,0. Gebruik van (alleen) andere m-waarden leidt tot puntenaftrek.
Opmerking: een formule voor L is gegeven. Deze formule kan in de volgende opgave(n) gebruikt worden.

©ThiemeMeulenhoff

43 *Bereken en rond af, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Gegeven is $L = 10^{-5{,}6-0{,}4m}$
$m = 4{,}30$ levert $L = 10^{-5{,}6-0{,}4\cdot 4{,}30} = 10^{-7{,}32}$
$m = 3{,}58$ levert $L = 10^{-5{,}6-0{,}4\cdot 3{,}58} = 10^{-7{,}032}$

$L_{dubbelster} = 10^{-7{,}32} + 10^{-7{,}032}$ dus opgelost moet worden $10^{-7{,}32} + 10^{-7{,}032} = 10^{-5{,}6-0{,}4m}$

$y_1 = 10^{-7{,}32} + 10^{-7{,}032}$

$y_2 = 10^{-5{,}6-0{,}4x}$ en bijvoorbeeld WINDOW: $[0,\ 6] \times [0,\ 10^{-6}]$

Calc Intersect levert $x \approx 3{,}129$
Conclusie: $m \approx 3{,}1$
Opmerking: een formule voor L is in de opgave hiervoor gegeven. Dit gegeven kan in deze opgave gebruikt worden.

44 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Gegeven zijn $L = 10^{-5{,}6-0{,}4m}$ en $L = \dfrac{C}{x^2}$

Er geldt dus $10^{-5{,}6-0{,}4m} = \dfrac{C}{x^2}$ dus geldt $-5{,}6 - 0{,}4 \cdot m = \log\left(\dfrac{C}{x^2}\right)$

Omdat $\log\left(\dfrac{C}{x^2}\right) = \log(C) - \log(x^2) = \log(C) - 2 \cdot \log(x)$

geldt $-5{,}6 - 0{,}4 \cdot m = \log(C) - 2 \cdot \log(x)$ dus $-0{,}4 \cdot m = 5{,}6 + \log(C) - 2 \cdot \log(x)$ dus

$m = \dfrac{5{,}6}{-0{,}4} + \dfrac{1}{-0{,}4} \cdot \log(C) - \dfrac{2}{-0{,}4} \cdot \log(x) = -14 - 2{,}5 \cdot \log(C) + 5 \cdot \log(x)$

Conclusie: $m(x) = -14{,}0 - 2{,}5 \cdot \log(C) + 5{,}0 \cdot \log(x)$
Opmerking: kennis van de rekenregels betreffende logaritmes is belangrijk.
Opmerking: een formule voor m is gegeven. Deze formule kan in de volgende opgave gebruikt worden.

45 *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Maak gebruik van de in de vorige opgave bewezen formule.*

Gegeven is $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ en $\dfrac{dx}{dt} = 1{,}7 \cdot 10^{12}$ en $x = 6{,}3 \cdot 10^{17}$ en

$m(x) = -14{,}0 - 2{,}5 \cdot \log(C) + 5{,}0 \cdot \log(x)$ dus $m'(x) = \dfrac{dm}{dx} = \dfrac{5}{x \cdot \ln(10)}$ (want

$(\log(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(10)}$)

$\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{x \cdot \ln(10)} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{12} = \dfrac{5}{6{,}3 \cdot 10^{17} \cdot \ln(10)} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{12} = \dfrac{5 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{12}}{6{,}3 \cdot 10^{17} \cdot \ln(10)}$

Conclusie: de gevraagde snelheid waarmee de magnitude verandert, is $\dfrac{dm}{dt} \approx 5{,}9 \cdot 10^{-6}$

Opmerking: kennis van de differentieerregels betreffende logaritmes is belangrijk.
Opmerking: C is een constante. Ga na wat dit voor gevolg heeft voor de afgeleide van $-2{,}5 \cdot \log(C)$.
Opmerking: gebruik eventueel haakjes bij het berekenen van het quotiënt.

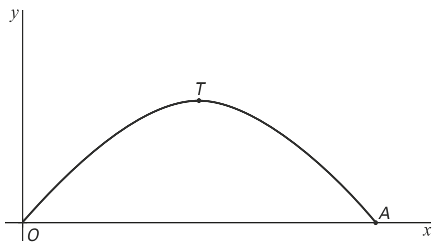
©ThiemeMeulenhoff

4 Periodieke functies

Twee benaderingen van sin(*x*)

Met domein $[0, \pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(x)$.
De grafiek van f snijdt de x-as in O en A en heeft als top T. Zie figuur 1.

figuur 1



Gegeven is verder de tweedegraadsfunctie $g(x) = ax(x - \pi)$, eveneens met domein $[0, \pi]$.
In de vragen 1 en 2 nemen we $a = \frac{-4}{\pi^2}$. De grafieken van f en g lijken dan op elkaar.

1 Toon aan dat ook de grafiek van g door O, A en T gaat.

In O is de helling van de grafiek van g groter dan de helling van de grafiek van f.
2 Toon dit aan met behulp van differentiëren.

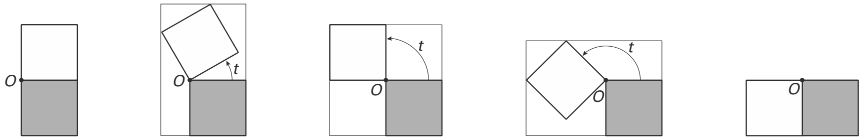
Een andere benadering voor de grafiek van f krijgen we als we a zodanig kiezen dat
geldt: $\int_0^{\pi}(g(x) - f(x))\,dx = 0$

3 Bereken in dit geval de exacte waarde van a.

Twee scharnierende vierkanten

Twee vierkanten, beide met zijde 1, hebben het hoekpunt O gemeenschappelijk.
Het onderste vierkant ligt vast. Het bovenste vierkant wordt om O gedraaid; t is de draaihoek in radialen.
In figuur 2 zijn tussen de begin- en eindstand drie tussenstanden getekend. Om de twee vierkanten is steeds een zo klein mogelijke rechthoek getekend, met twee zijden langs het vaste vierkant.

figuur 2



De oppervlakte R van de omhullende rechthoek is een functie van de draaihoek t.

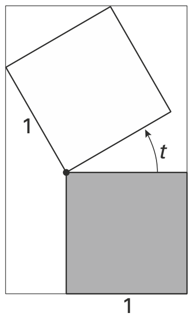
4 Bereken de oppervlakte R voor $t = \frac{1}{4}\pi$.

©ThiemeMeulenhoff

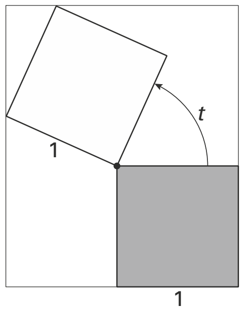
Voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt: $R(t) = (1 + \sin(t))(1 + \sin(t) + \cos(t))$.

In figuur 3 is de situatie getekend voor een waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.
5 Toon de juistheid van de formule aan voor elke waarde van t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

figuur 3



figuur 4



Er zijn tussen de begin- en de eindstand twee posities van de vierkanten waarvoor $R(t)$ maximaal is. In figuur 4 is één van die posities getekend.

6 Teken in figuur 4 de andere positie van de vierkantjes waarvoor $R(t)$ maximaal is. Licht je werkwijze toe.

7 Toon met behulp van differentiëren aan dat $R'(0) = 3$.

Lissajous-figuur

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ beschrijven de baan van een bewegend punt. Deze baan heeft precies vier punten met de y-as gemeen.
8 Bereken de coördinaten van deze punten.

Tijdens de beweging verandert de snelheid van het punt voortdurend. De hoogste snelheid die het punt kan bereiken wordt enkele malen bereikt. Als je de beweging op de GR simuleert, lijkt het alsof deze hoogste waarde bereikt wordt bij het passeren van de y-as.
9 Toon aan dat dit *niet* het geval is.

©ThiemeMeulenhoff

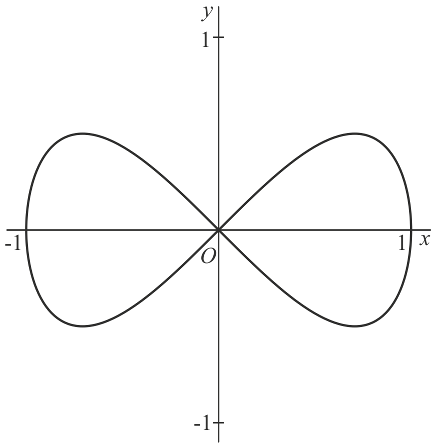
Lemniscaat

Punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t < 2\pi$$

In de figuur is de baan van P getekend. Deze baan wordt lemniscaat genoemd.

figuur



Tijdens de beweging passeert punt P vier keer de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

10 Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.

Tijdens de beweging gaat P twee keer door de oorsprong O. De richtingen waarin P de oorsprong passeert zijn verschillend.

11 Bereken exact de hoek tussen deze twee richtingen.

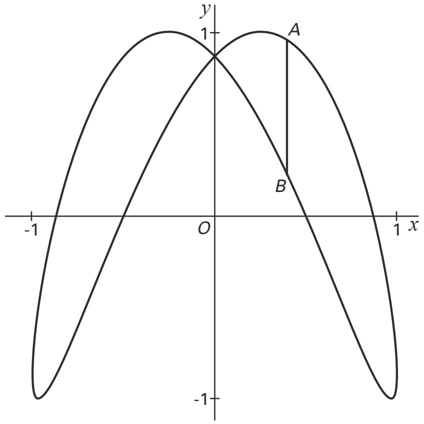
Lissajous-kromme

De baan van een punt P wordt bepaald door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Zie figuur 5.

figuur 5



12 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x-as.

P passeert de y-as steeds met dezelfde snelheid.

13 Bereken de exacte waarde van deze snelheid.

Op het tijdstip $t = a$ bevindt het punt P zich in A en op het tijdstip $t = \pi - a$ in B, met $0 < a < \frac{1}{2}\pi$. A en B liggen op een verticale lijn. Zie figuur 5.

14 Bewijs dat de lengte van AB gelijk is aan $\sin(2a)$.

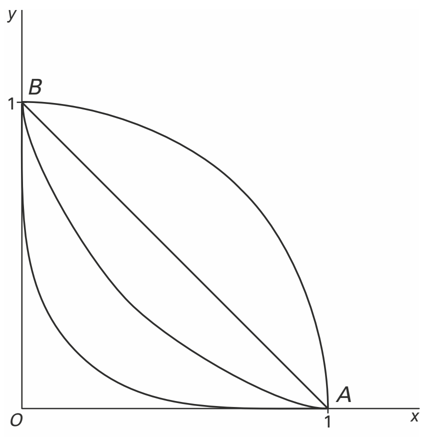
Machten van sinus en cosinus

Voor elk positief geheel getal n bekijken we de baan K_n van een punt dat beweegt volgens

$$\begin{cases} x(t) = \cos^n(t) \\ y(t) = \sin^n(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi$$

In figuur 6 zijn vier banen getekend.

figuur 6



Gegeven een punt P van K_6.

15 Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan K_6 in punt P gelijk is aan $-\tan^4(t)$.

In een punt P van K_6 heeft de raaklijn aan K_6 richtingscoëfficiënt -9.

16 Bereken de coördinaten van P.

Rechte banen

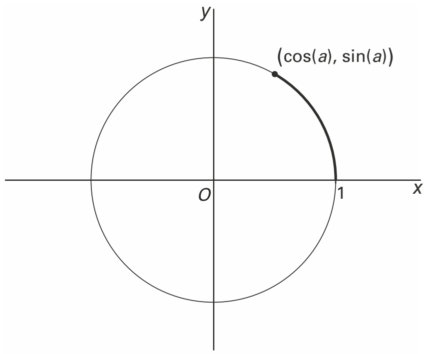
Een punt P beweegt in een baan die gegeven is door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(a - t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(a - t) + \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \le a \le \pi$$

In figuur 7 is in een assenstelsel de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 getekend. Op de cirkel is voor een waarde van a een boog met lengte a getekend.

17 Teken in figuur 7 de plaats van het punt P op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$. Licht je werkwijze toe.

figuur 7



De beweging van P kan ook beschreven worden door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}a - t) \\ y(t) = 2\sin(\tfrac{1}{2}a)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}a - t) \end{cases}$$

door gebruik te maken van de formules: $\cos(t) + \cos(u) = 2\cos\left(\frac{t+u}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t-u}{2}\right)$ en $\sin(t) + \sin(u) = 2\sin\left(\frac{t+u}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t-u}{2}\right)$

18 Toon dit aan.

©ThiemeMeulenhoff

Als je voor enkele waarden van a de baan van P tekent, lijkt deze steeds een deel van een rechte lijn door (0, 0).

19 Toon voor $a = 2$ aan dat de baan van P inderdaad een deel van een lijn $y = mx$ is.

Periodieke beweging

Een punt beweegt zich in het Oxy-vlak volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(4t) - 1 \end{cases}$$

Als je de baan van het punt bekijkt op het scherm van de grafische rekenmachine, krijg je de indruk dat de punten (1, 0) en (–1, 0) zogenaamde *keerpunten* zijn.

20 Toon aan dat de snelheid in deze punten gelijk is aan 0.

Het lijkt alsof het punt zich beweegt langs de grafiek van een veeltermfunctie van de vierde graad, dus $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

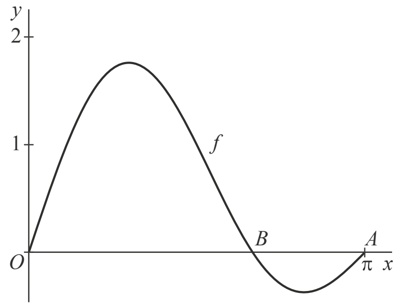
21 Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

Goniometrische functies

De functie f is gegeven door $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.
In figuur 8 is de grafiek van f getekend. Deze grafiek snijdt de x-as tussen $O(0, 0)$ en $A(\pi, 0)$ in het punt B.

22 Bereken exact de x-coördinaat van punt B.

figuur 8

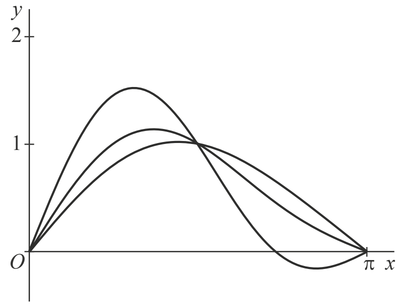


Voor elke positieve waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin(x) + a \cdot \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.
In figuur 9 is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

Voor een bepaalde waarde van a heeft de grafiek van f_a twee toppen en is de x-coördinaat van een van deze toppen $\frac{5}{6}\pi$.

23 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van de andere top bij deze waarde van a.

figuur 9

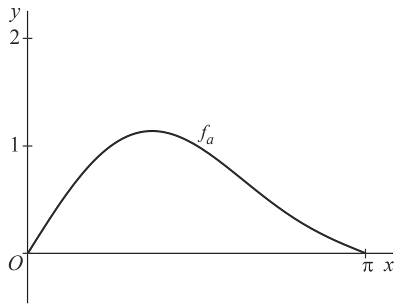


©ThiemeMeulenhoff

Voor elke waarde van a waarvoor geldt $0 < a < \frac{1}{2}$ ligt de grafiek van f_a tussen (0, 0) en (π, 0) geheel boven de x-as. In figuur 10 is een dergelijke grafiek getekend.

24 Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x-as, onafhankelijk is van a.

figuur 10



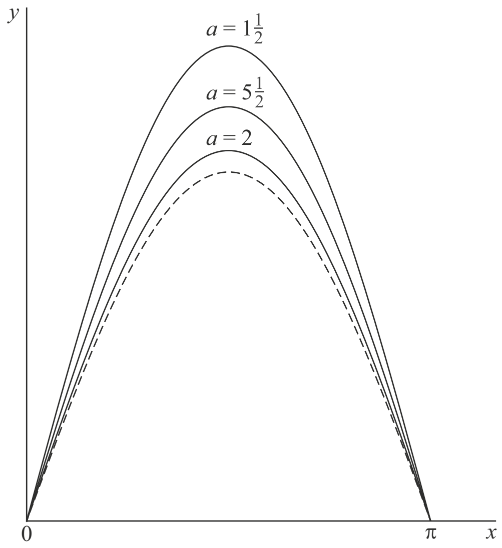
Kleinste amplitude

Voor elke waarde van a, met $a > 1$, is de functie f_a met domein $[0, \pi]$ gegeven door

$f_a(x) = \frac{a}{\ln(a)} \cdot \sin(x)$

In figuur 11 is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

figuur 11



Voor elke waarde van a is de grafiek van f_a een sinusoïde. In de figuur is te zien dat de amplitude bij $a = 2$ kleiner is dan bij $a = 1\frac{1}{2}$ of $a = 5\frac{1}{2}$.
Er is een waarde van a waarvoor de amplitude minimaal is. De grafiek van f_a bij deze waarde van a is in de figuur gestippeld getekend.

25 Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as en de grafiek van f_a met de kleinste amplitude.

©ThiemeMeulenhoff

Gemeenschappelijk met de *x*-as

Voor elke waarde van a met $a \neq 0$ is de functie f_a gegeven door
$f_a(x) = 2\sin(ax) + \sin(2ax)$. Het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafiek van f_a en de x-as.

26 Bewijs dat voor elke waarde van a (met $a \neq 0$) de grafiek van f_a de x-as in $(\frac{\pi}{a}, 0)$ raakt.

27 Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

De wijzers van een uurwerk

We volgen de eindpunten van de wijzers van een uurwerk. Daartoe brengen we een assenstelsel aan met de oorsprong in het draaipunt van de wijzers, de positieve x-as door '3 uur', de positieve y-as door '12 uur' en met de cm als eenheid. We rekenen de tijd t in uren, vanaf 0:00 uur.

De bewegingsvergelijkingen van het eindpunt van de grote wijzer zijn:
$x = 3\sin(2\pi t)$, $y = 3\cos(2\pi t)$

De bewegingsvergelijkingen van het eindpunt van de kleine wijzer zijn:
$x = 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$, $y = 2\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$

28 Teken in één figuur op ware grootte de banen van de eindpunten van de wijzers en geef daarin de wijzers aan op het tijdstip $t = 1{,}3$. Licht je werkwijze toe.

Op het tijdstip $t = 0$ liggen de wijzers over elkaar heen.

29 Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop dit weer het geval is.

De (rechtstreekse) afstand tussen de eindpunten van de wijzers verandert voortdurend.

30 Toon aan dat deze afstand op tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{13 - 12\cos\left(\frac{11}{6}\pi t\right)}$

31 Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop de eindpunten van de wijzers, samen met de oorsprong, een gelijkbenige driehoek vormen.

©ThiemeMeulenhoff

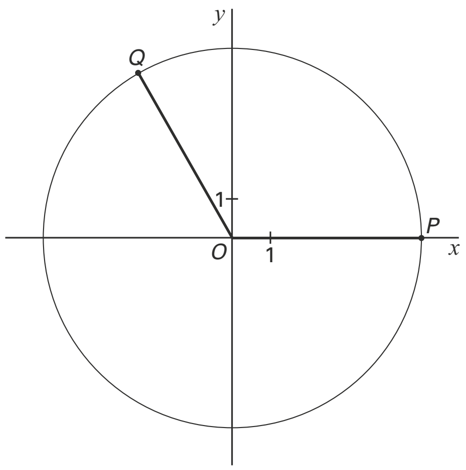
Achtervolging

Op tijdstip $t = 0$ beginnen de punten P en Q met een eenparige cirkelbeweging.
De bewegingsvergelijkingen zijn

voor P: $\begin{cases} x(t) = 5\cos\left(\frac{11}{10}t\right) \\ y(t) = 5\sin\left(\frac{11}{10}t\right) \end{cases}$ en voor Q: $\begin{cases} x(t) = 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \\ y(t) = 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$

Hierbij is t in seconden en zijn $x(t)$ en $y(t)$ in centimeters.
In figuur 12 staat de beginsituatie op schaal getekend.

figuur 12



Tijdens de beweging wordt Q telkens door P ingehaald.

32 Bereken na hoeveel seconden Q voor het eerst door P wordt ingehaald.

Op een bepaald tijdstip heeft P over de cirkel een afstand van 20 cm afgelegd.

33 Teken in figuur 12 de plaats van P op dit tijdstip. Licht je werkwijze toe.

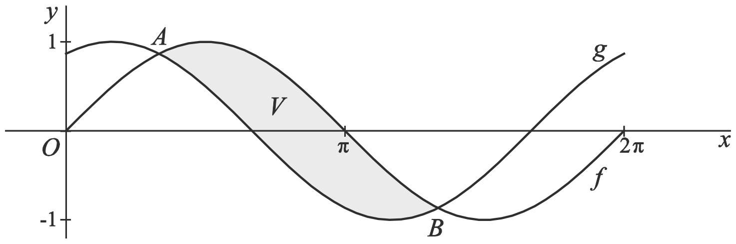
Tussen twee sinusgrafieken

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$.

In figuur 14 zijn de grafieken van f en g getekend op het domein $[0,2\pi]$.

De grafieken van f en g snijden elkaar op dit domein bij $x = \frac{1}{3}\pi$ in het punt A en bij $x = \frac{4}{3}\pi$ in het punt B. Zie figuur 13.

figuur 13



V is het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

34 Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van V.

Hints bij hoofdstuk 4

1 Geef aan de hand van $f(x)$ de coördinaten van O, A en T en laat zien dat $g(x)$ ook door deze punten gaat.

2 Bepaal eerst de hellingen met behulp van differentiëren. Dus bepaal $f'(0)$ en $g'(0)$.

3 Exact, dus grafische rekenmachine mag niet gebruikt worden. Bepaal eerst de primitieve functies.

4 Maak een tekening van de bedoelde stand en bereken de lengtes van de belangrijke lijnstukken.

5 Maak een tekening van een willekeurige stand. De gegeven formule doet denken aan lengte keer breedte.

6 Product van l en b is maximaal, dus l en b zijn inwisselbaar.

7 Gebruik de productregel en vul $t = 0$ in.

8 Snijpunten met de y-as, dus bereken eerst $x = 0$.

9 Snelheid = $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Het is voldoende om bijvoorbeeld voor één waarde aan te tonen dat de hoogste snelheid niet wordt bereikt bij het passeren van de y-as.

10 Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden en maak gebruik van een verdubbelingsformule. Zie formuleblad.

11 Bereken eerst voor welke waarden van t de grafiek door de oorsprong gaat.
Helling = $\frac{y'}{x'}$

12 Welke vergelijking moet je oplossen?

13 Begin met het bepalen van de formule voor de snelheid.

14 De verticale afstand is gelijk aan $y(a) - y(\pi - a)$

15 Bepaal eerst $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \ldots$ (maak gebruik van de kettingregel) en bedenk welke formule je voor $\tan(x)$ kent.

16 Welke vergelijking moet worden opgelost?

17 Vul voor $t = 0$ en $t = \pi$ in en bepaal de plaats van deze punten.

18 Bedenk welk formule je kent om $\cos(t) + \cos(u)$ te herschrijven.

19 Vul voor $a = 2$ in en maak gebruik van $\frac{y}{x} = m$

20 Laat door invullen zien dat $x'(t)$ en $y'(t)$ is 0 in deze punten.

21 Herschrijf $\cos(4t)$ met behulp van de verdubbelingsformule: $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$

22 Maak een vergelijking en los deze algebraïsch op. Bedenk welke formule je kunt gebruiken.

23 Top, dus afgeleide gelijk stellen aan 0 voor de gegeven waarde van x en daarmee eerst a berekenen.

24 Bepaal de primitieve en laat zien dat hier een constante uit komt.

25 De amplitude is $\frac{a}{\ln(a)}$. De amplitude is minimaal als de afgeleide is 0

26 De x-as raken, dus $f(\frac{\pi}{a}) = 0$ (gegeven) en $f'(\frac{\pi}{a}) = 0$ (berekenen).

27 Puntsymmetrie in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ dus geldt: $f(\frac{1}{2}\pi - b) = -f(\frac{1}{2}\pi + b)$.

28 Vul $t = 1{,}3$ in.

29 Welke twee vergelijkingen moeten (grafisch) opgelost worden?

30 Schets de situatie. Gebruik Pythagoras.

31 Schets de situatie. Hoe lang zijn de benen van de eerste gelijkbenige driehoek?

32 Maak gebruik van de hoeksnelheid of los op $x_P = x_Q$ en $y_P = y_Q$

33 Omtrek cirkel = $2\pi r$

34 Oppervlakte van gevraagde gebied is $\int_{\ldots}^{\ldots} (f(x) - g(x))\,dx = [F(x) - G(x)]_{\ldots}^{\ldots} =$

Uitwerkingen bij hoofdstuk 4

Twee benaderingen van sin(*x*)

1 *Geef aan de hand van f(x) de coördinaten van O, A en T en laat zien dat g(x) ook door deze punten gaat.*

$f(0) = \sin(0) = 0$ dus $O(0, 0)$

$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$ dus $T(\frac{1}{2}\pi, 1)$

$f(\pi) = \sin(\pi) = 0$ dus $A(\pi, 0)$

$g(0) = \frac{-4}{\pi^2} \cdot 0 \cdot (0 - \pi) = 0$

$g\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{-4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\pi - \pi\right) = \frac{-4\pi}{2\pi^2} \cdot -\frac{1}{2}\pi = \frac{4\pi^2}{4\pi^2} = 1$

$g(\pi) = \frac{-4}{\pi^2} \cdot \pi \cdot (\pi - \pi) = \frac{-4\pi}{\pi^2} \cdot 0 = 0$

Conclusie: de grafiek van g gaat door de punten O, A en T

2 *Bereken de helling van de grafiek van f en de helling van de grafiek van g en trek de conclusie. Met behulp van differentiëren, dus zonder grafische rekenmachine.*

$f'(x) = \cos(x)$ en helling $= f'(0) = \cos(0) = 1$

$g(x) = \frac{-4x}{\pi^2} \cdot (x - \pi) = \frac{-4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi} = \frac{-4}{\pi^2} \cdot x^2 + \frac{4}{\pi} \cdot x$ en $g'(x) = \frac{-4}{\pi^2} \cdot 2x + \frac{4}{\pi} = \frac{-8x}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}$

en helling $= g'(0) = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$

Conclusie: de helling van de grafiek van g is groter dan de helling van de grafiek van f.

3 *Exact, dus zonder grafische rekenmachine.*

$\int_0^\pi (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^\pi (ax(x - \pi) - \sin(x))\,dx = \int_0^\pi (ax^2 - a\pi x - \sin(x))\,dx$

De primitieve van ax^2 is $\frac{1}{3}ax^3$

De primitieve van $a\pi x$ is $\frac{1}{2}a\pi x^2$

De primitieve van $\sin(x)$ is $-\cos(x)$

$\int_0^\pi (g(x) - f(x))\,dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}a\pi x^2 + \cos(x)\right]_0^\pi = \frac{1}{3}a\pi^3 - \frac{1}{2}a\pi \cdot \pi^2 + \cos(\pi) - \cos(0) =$

$\frac{1}{3}a\pi^3 - \frac{1}{2}a\pi^3 + -1 - 1 = -\frac{1}{6}a\pi^3 + -2 = 0$

dus $\frac{1}{6}a\pi^3 = -2$ dus $a\pi^3 = -12$ dus $a = \frac{-12}{\pi^3}$

Conclusie: $a = \frac{-12}{\pi^3}$

Twee scharnierende vierkanten

4 $t = \frac{1}{4}\pi$ dus $t = 45°$ zie tekening hiernaast

In driehoek ABC geldt $AB = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $AC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

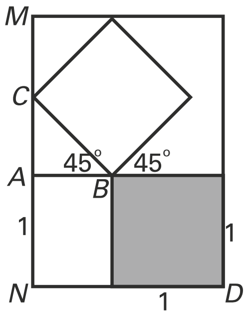
Lengte $l = ND = AB + 1$ en breedte $b = NM = NA + 2 \cdot AC$

opp $R = l \cdot b = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}) =$

$(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$

Conclusie: opp $R = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Afgeronde waarde is ook toegestaan.



©ThiemeMeulenhoff

5 *Let op: de formule moet ontwikkeld worden en dus niet verklaard worden. Gebruik de tekening hiernaast.*

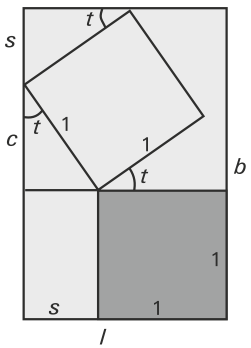
opp $= l \cdot b$ en l en b moeten uitgedrukt worden in t.

$l = 1 + s$ en $b = 1 + c + s$

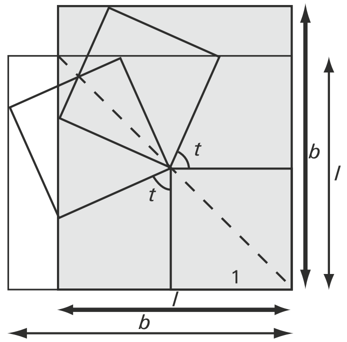
$s = \sin(t)$ en $c = \cos(t)$

dus $l = 1 + \sin(t)$ en $b = 1 + \cos(t) + \sin(t)$

Conclusie: opp $= l \cdot b = (1 + \sin(t)) \cdot (1 + \cos(t) + \sin(t))$



6 *opp = l · b is maximaal. De l en de b zijn inwisselbaar, kunnen dus in de tekening van plaats verwisseld worden. Om de tweede situatie te bereiken moet de gegeven tekening gespiegeld worden in de stippellijn, zie tekening.*



7 *Gebruik de productregel, en vul t = 0 in.*

$R(t) = (1 + \sin(t)) \cdot (1 + \cos(t) + \sin(t))$

$R'(t) = \cos(t) \cdot (1 + \cos(t) + \sin(t)) + (1 + \sin(t)) \cdot (-\sin(t) + \cos(t))$

$R'(0) = 1 \cdot (1 + 1 + 0) + (1 + 0) \cdot (0 + 1) = 3$

Conclusie: $R'(0) = 3$

Lissajous-figuur

8 Snijpunten met de y-as dus $x = 0$ dus $\cos(3t) = 0$ met $0 \le t \le 2\pi$

$\cos(3t) = 0$ dus $3t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k een geheel getal

$t = \frac{1}{6}\pi + k\frac{1}{3}\pi$ dus

$t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{3}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ of $t = 1\frac{1}{6}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{5}{6}\pi$

Opvallend is dat er 6 waarden van t berekend zijn terwijl er 4 punten gevraagd worden. Bij het berekenen van de bijbehorende y-coördinaten zal blijken dat verschillende waarden van t eenzelfde snijpunt met de y-as opleveren, met slechts 4 snijpunten als resultaat.

$t = \frac{1}{6}\pi$ en $t = \frac{5}{6}\pi$ leveren $(0, \frac{1}{2})$

$t = 1\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$ leveren $(0, -\frac{1}{2})$,

$t = \frac{1}{2}\pi$ levert $(0, 1)$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ levert $(0, -1)$

9 *Bepaal eerst* $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

$x(t) = \cos(3t)$ dus $x'(t) = -3\sin(3t)$

$y(t) = \sin(t)$ dus $y'(t) = \cos(t)$

$v(t) = \sqrt{(-3\sin(3t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{9\sin^2(3t) + \cos^2(t)}$

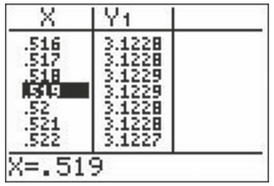
©ThiemeMeulenhoff

eerste manier:
Het is voldoende om bijvoorbeeld voor één waarde aan te tonen dat de hoogste snelheid niet wordt bereikt bij het passeren van de y-as. Bekijk bijvoorbeeld met behulp van TABLE, of er voor t-waarden in de buurt van t-waarden uit de bovenstaande opgave een grotere waarde van v verkregen wordt.

$v\left(\frac{1}{6}\pi\right) = v\left(\frac{5}{6}\pi\right) = v\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = v\left(1\frac{5}{6}\pi\right) \approx 3{,}1225$

$\frac{1}{6}\pi \approx 0{,}5236$

formule $y = \sqrt{(9(\sin(3x))^2 + (\cos(x))^2)}$ invoeren



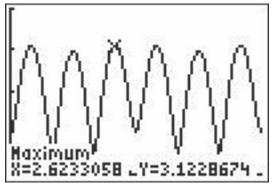
tabel instellen op startwaarde 0,516 en stapgrootte 0,001
geeft het volgende scherm.
Hier is te zien dat bijvoorbeeld

$v(0{,}519) > v\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ want $3{,}1229 > 3{,}1225$

Conclusie: de maximale snelheid wordt niet bereikt bij het passeren van de y-as.

tweede manier:

formule $y = \sqrt{(9(\sin(3x))^2 + (\cos(x))^2)}$ invoeren



bijvoorbeeld WINDOW [0, 6.28]x[0, 4]
maximum bepalen met de grafische rekenmachine levert
de grootste waarde $y \approx 3{,}1229$ voor
$x = t \approx 0{,}518$ of $t \approx 2{,}623$ of $t \approx 3{,}660$ of $t \approx 5{,}765$
Deze t-waarden zijn ongelijk aan de t-waarden van de snijpunten met de y-as.
Conclusie: de maximale snelheid wordt niet bereikt bij het passeren van de y-as.

Lemniscaat

10 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: noteer de vergelijking die opgelost moet worden. Denk aan de (gegeven) formules voor de goniometrie.

Opgelost moet worden $y = \sin(t) \cdot \cos(t) = \frac{1}{4}$

Omdat $2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) = \sin(2t)$ geldt $\sin(t) \cdot \cos(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2t)$

dus $\frac{1}{2} \cdot \sin(2t) = \frac{1}{4}$ en $\sin(2t) = \frac{1}{2}$

$2t = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $2t = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

Dus $t = \frac{1}{12}\pi + k\pi$ of $t = \frac{5}{12}\pi + k\pi$

Conclusie: $t \in [0, 2\pi]$ dus $t = \frac{1}{12}\pi$ of $t = \frac{5}{12}\pi$ of $t = 1\frac{1}{12}\pi$ of $t = 1\frac{5}{12}\pi$

11 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: P gaat twee keer door de oorsprong. Bereken de waarden van t die daarbij horen. De daarbij horende richtingen worden berekend met behulp van $\frac{y'}{x'}$.
Noteer de vergelijkingen die opgelost moeten worden.
Opgelost moet worden $x = \cos(t) = 0$ en $y = \sin(t) \cdot \cos(t) = 0$ met $t \in [0{,}2\pi]$

$x = \cos(t) = 0$ of $y = \sin(t) \cdot \cos(t) = 0$

$t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ — $\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = 0$

$t = 0,\ t = \frac{1}{2}\pi,\ t = \pi,\ t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$

Dus P gaat door de oorsprong als $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$

Richtingen worden berekend met behulp van $\frac{y'}{x'}$

$x' = -\sin(t)$ en $y' = -\sin^2(t) + \cos^2(t)$ (berekend met behulp van de productregel)

$t = \frac{1}{2}\pi$ levert $\frac{y'}{x'} = \frac{-\sin^2(t) + \cos^2(t)}{-\sin(t)} = \frac{-1+0}{-1} = 1$ dus hoek met positieve x-as is 45°

$t = 1\frac{1}{2}\pi$. levert $\frac{y'}{x'} = \frac{-\sin^2(t) + \cos^2(t)}{-\sin(t)} = \frac{-1+0}{1} = -1$ dus hoek met positieve x-as is 135° (of –45°)

Conclusie: gevraagde hoek is 90°

Lissajous-kromme

12 Snijpunt x-as dus $y(t) = 0$ dus $\sin(2t + \frac{1}{3}\pi) = 0$

$2t + \frac{1}{3}\pi = 0 + k\pi$

$2t = -\frac{1}{3}\pi + k\pi$

$t = -\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}k\pi$

dus $t = \frac{2}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ of $t = \frac{8}{6}\pi$ of $t = \frac{11}{6}\pi$ invullen in $x(t) = \sin(t)$

Conclusie: $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ en $(-\frac{1}{2}, 0)$

of

$\sin(2t + \frac{1}{3}\pi) = 0$ oplossen met de grafische rekenmachine en bijvoorbeeld intersect levert $t \approx -0{,}52$ of $t \approx 1{,}05$ of $t \approx 2{,}62$ of $t \approx 4{,}19$ invullen in $x(t) = \sin(t)$
Conclusie: (–0,5; 0), (0,87; 0), (0,5; 0), (–0,87; 0)

13 *Snelheid, dus gebruik* $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
snijpunt y-as dus $x(t) = 0$ dus $\sin(t) = 0$ dus $t = 0$ of $t = \pi$
$x'(t) = \cos(t)$ dus $x'(0) = \cos(0) = 1$

$y'(t) = 2 \cdot \cos(2t + \frac{1}{3}\pi)$ dus $y'(0) = 2 \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) = 1$

$v(t) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Conclusie: de exacte waarde van de snelheid is $\sqrt{2}$.

14 De verticale afstand tussen de punten A en B is gelijk aan $y(a) - y(\pi - a)$

$y(a) - y(\pi - a) = \sin(2a + \frac{1}{3}\pi) - \sin(2(\pi - a) + \frac{1}{3}\pi) = \sin(2a + \frac{1}{3}\pi) - \sin(2\frac{1}{3}\pi - 2a)$

er geldt:

- $\sin(2a + \frac{1}{3}\pi) = \sin(2a) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) + \cos(2a) \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi)$ *(zie formuleblad)* en
- $\sin(2\frac{1}{3}\pi - 2a) = \sin(\frac{1}{3}\pi - 2a) = \sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot \cos(2a) - \cos(\frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2a)$
- $\cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

dus $y(a) - y(\pi - a) = \sin(2a + \frac{1}{3}\pi) - \sin(2\frac{1}{3}\pi - 2a) =$

$\left(\sin(2a) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) + \cos(2a) \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi)\right) - \left(\sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot \cos(2a) - \cos(\frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2a)\right) =$

$\sin(2a) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) - -\cos(\frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2a) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2a) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2a)$

Conclusie: $y(a) - y(\pi - a) = \sin(2a)$

Machten van sinus en cosinus

15 Voor K_6 geldt $\begin{cases} x(t) = \cos^6(t) \\ y(t) = \sin^6(t) \end{cases}$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn wordt gegeven door $\frac{y'(t)}{x'(t)}$

Omdat $x'(t) = -6 \cdot \cos^5(t) \cdot \sin(t)$ en $y'(t) = 6 \cdot \sin^5(t) \cdot \cos(t)$ geldt dus:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6 \cdot \sin^5(t) \cdot \cos(t)}{-6 \cdot \cos^5(t) \cdot \sin(t)} = \frac{-\sin^4(t)}{\cos^4(t)} = -\tan^4(t)$$

Conclusie: de richtingscoëfficiënt is gelijk aan $-\tan^4(t)$

16 De richtingscoëfficiënt is gelijk aan –9 dus

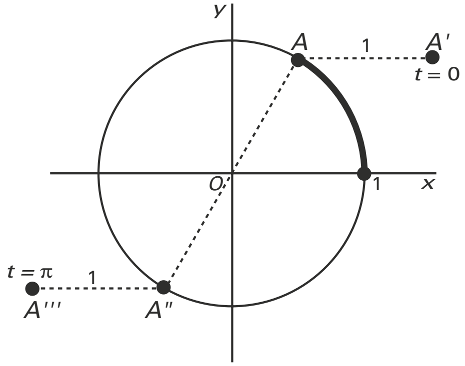
$-\tan^4(t) = -9$ dus $\tan(t) = \sqrt[4]{9} = 9^{0,25} = \sqrt{3}$

Er geldt dus $t = \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0472$

Conclusie: de coördinaten van P zijn $\left(\frac{1}{64}, \frac{27}{64}\right)$ of (0,0156; 0,4219)

Rechte banen

17 *Vul t = 0 en t = π in.*
$t = 0$ levert
$x(0) = \cos(a) + \cos(0) = \cos(a) + 1$
$y(0) = \sin(a) + \sin(0) = \sin(a)$
Het getekende punt schuift 1 naar rechts (A').
$t = \pi$ levert
$x(\pi) = \cos(a - \pi) + \cos(\pi) = -\cos(a) - 1$
$y(\pi) = \sin(a - \pi) + \sin(\pi) = -\sin(a)$
Het getekende punt wordt gespiegeld in de oorsprong (A'') en 1 naar links geschoven (A''').



18 *Gebruik de formules voor cos(u) + cos(t) en sin(u) + sin(t) om x(t) en y(t) te herschrijven.*

$$\cos(u) + \cos(t) = 2\cos\left(\frac{u+t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-t}{2}\right)$$

$$\sin(u) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{u+t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-t}{2}\right)$$

neem $u = a - t$ dan geldt:

$$x(t) = \cos(a-t) + \cos(t) = 2\cos\left(\frac{(a-t)+t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(a-t)-t}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}a\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}a - t\right)$$

$$y(t) = \sin(a-t) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{(a-t)+t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(a-t)-t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}a\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}a - t\right)$$

19 *Vul a = 2 in bij de formules uit het vorige onderdeel.*

$x(t) = 2\cos(1) \cdot \cos(1 - t)$ en $y(t) = 2\sin(1) \cdot \cos(1 - t)$

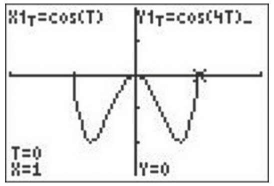
omdat $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2\sin(1) \cdot \cos(1-t)}{2\cos(1) \cdot \cos(1-t)} = \frac{\sin(1)}{\cos(1)} = m$ is constant

Conclusie: punten P liggen op een deel van de rechte $y = mx$ met $m = \frac{\sin(1)}{\cos(1)}$.

©ThiemeMeulenhoff

Periodieke beweging

20 *Keerpunt: de snelheid is 0 dus x'(t) = 0 en y'(t) = 0.*
In (–1, 0) geldt $\cos(t) = -1$ en $\cos(4t) - 1 = 0$.
$\cos(t) = -1$ als $t = \pi$.
voor $t = \pi$ geldt $\cos(4t) - 1 = \cos(4\pi) - 1 = 0$
In (1, 0) geldt $\cos(t) = 1$ en $\cos(4t) - 1 = 0$.
$\cos(t) = 1$ als $t = 0$
voor $t = 0$ geldt $\cos(4t) - 1 = \cos(0) - 1 = 0$
$x'(t) = -\sin(t)$ en $y'(t) = -4\sin(4t)$
voor $t = 0$ geldt:
$x'(0) = -\sin(0) = 0$ en $y'(0) = -4\sin(0) = 0$
voor $t = \pi$ geldt:
$x'(\pi) = -\sin(\pi) = 0$ en $y'(\pi) = -4\sin(\pi) = 0$
Conclusie: de snelheid in beide punten is 0.



21 $x(t) = \cos(t)$ en $y(t) = \cos(4t) - 1$ is dan te schrijven als
$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
gebruik de verdubbelingformule $\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1$
$y(t) = \cos(4t) - 1 = 2\cos^2(2t) - 1 - 1 = 2\cos^2(2t) - 2$
gebruik nogmaals de verdubbelingformule $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$
$y(t) = 2(2\cos^2(t) - 1)^2 - 2 = 8\cos^4(t) - 8\cos^2(t)$
Er geldt nu:
$y = 8x^4 - 8x^2$ en dit is een veeltermfunctie van de vierde graad.

Goniometrische functies

22 *Exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.*
eerste methode: gebruik sin(2x) = 2sin(x)·cos(x)
$\sin(x) + \sin(2x) = 0$
$\sin(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 0$
$\sin(x) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(x)) = 0$

$\sin(x) = 0$ *of* $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Conclusie: $x = \frac{2}{3}\pi$

tweede methode: gebruik de formules -sinA = sin(-A) én sin(A) = sin(B) dan geldt A = B + 2kπ of A = π – B + 2kπ
$\sin(x) = -\sin(2x)$
$\sin(x) = \sin(-2x)$

$x = -2x + 2k\pi$	of	$x = \pi - (-2x) + 2k\pi$
$3x = 2k\pi$	of	$-x = \pi + 2k\pi$
$x = \frac{2}{3}k\pi$	of	$x = -\pi + 2k\pi$

Conclusie: $x = \frac{2}{3}\pi$

©ThiemeMeulenhoff

23 *In twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan. Top, dus afgeleide gelijk stellen aan 0*
$f(x) = \sin(x) + a \cdot \sin(2x)$
$f'(x) = \cos(x) + 2 \cdot a \cdot \cos(2x)$

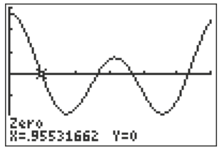
Er is een top voor $x = \frac{5}{6}\pi$ dus $f'(\frac{5}{6}\pi) = \cos(\frac{5}{6}\pi) + 2 \cdot a \cdot \cos(\frac{10}{6}\pi) = 0$

$-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$ *dus* $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x)$

$f'(x) = \cos(x) + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos(2x) = \cos(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(2x)$

$\cos(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(2x) = 0$



Oplossen met behulp van grafische rekenmachine levert $x = 0{,}96$
Conclusie: $x \approx 0{,}96$

24 *Oppervlakte berekenen met*

Oppervlakte $= \int_0^{\pi} (\sin(x) + a \cdot \sin(2x))\, dx = \left[-\cos(x) - \frac{1}{2} a \cos(2x)\right]_0^{\pi} =$

$(1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1) - (-1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1) = 2$

Conclusie: de oppervlakte is constant dus onafhankelijk van a

Kleinste amplitude

25 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Minimale amplitude dus afgeleide van amplitude $= \frac{a}{\ln(a)}$ *gelijkstellen aan 0 (gebruik quotiëntregel)*

amplitude $= \frac{a}{\ln(a)}$

Dus minimale amplitude als amplitude' $= \dfrac{\ln(a) \cdot 1 - a \cdot \frac{1}{a}}{(\ln(a))^2} = \dfrac{\ln(a) - 1}{(\ln(a))^2} = 0$ dus

$\ln(a) = 1$ dus $a = e$

De functie met de kleinste amplitude is dus: $f_e(x) = \frac{e}{\ln(e)} \cdot \sin(x) = e \cdot \sin(x)$

Oppervlakte $= \int_0^{\pi} (e \cdot \sin(x))\, dx = [-e \cdot \cos(x)]_0^{\pi} = -e \cdot -1 - (-e \cdot 1) = 2e$

Conclusie: gevraagde oppervlakte is 2e

Gemeenschappelijk met de *x*-as

26 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

De *x*-as raken, dus moet tegelijkertijd gelden $f(\frac{\pi}{a}) = 0$ *en* $f'(\frac{\pi}{a}) = 0$

Omdat gegeven is dat $(\frac{\pi}{a}, 0)$ een gemeenschappelijk punt is van f_a en de *x*-as, hoeft $f(\frac{\pi}{a}) = 0$ niet bewezen te worden. Te bewijzen: $f'(\frac{\pi}{a}) = 0$ klopt voor iedere waarde van *a*.

$f_a'(x) = 2a \cdot \cos(ax) + 2a \cdot \cos(2ax)$

$f_a'(\frac{\pi}{a}) = 2a \cdot \cos(a \cdot \frac{\pi}{a}) + 2a \cdot \cos(2a \cdot \frac{\pi}{a}) = 2a \cdot \cos(\pi) + 2a \cdot \cos(2\pi) = 2a \cdot -1 + 2a \cdot 1 = 0$

Conclusie: $f_a'(\frac{\pi}{a}) = 0$ klopt voor iedere waarde van *a*, dus de grafiek van f_a raakt voor elke waarde van *a* de *x*-as.
Opmerking: aantonen voor enkele waarden van a dat $f_a'(\frac{\pi}{a}) = 0$, levert geen scorepunten op.

27 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Bij puntsymmetrie in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ geldt: $f(\frac{1}{2}\pi - b) = -f(\frac{1}{2}\pi + b)$

Bekeken wordt f_2 dus hier geldt $a = 2$

Puntsymmetrisch in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, dus moet aangetoond worden $f(\frac{1}{2}\pi - p) = -f(\frac{1}{2}\pi + p)$

oftewel $f(\frac{1}{2}\pi - p) + f(\frac{1}{2}\pi + p) = 0$

We herschrijven eerst $f(\frac{1}{2}\pi - p)$

$f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2\sin(2 \cdot (\frac{1}{2}\pi - p)) + \sin(4 \cdot (\frac{1}{2}\pi - p)) = 2\sin(\pi - 2p) + \sin(2\pi - 4p)$

Omdat $2\sin(\pi - 2p) = 2\sin(2p)$ en $\sin(2\pi - 4p) = -\sin(4p)$ geldt:

$f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2\sin(2p) - \sin(4p)$

We herschrijven daarna $f(\frac{1}{2}\pi + p)$

$f(\frac{1}{2}\pi + p) = 2\sin(2 \cdot (\frac{1}{2}\pi + p)) + \sin(4 \cdot (\frac{1}{2}\pi + p)) = 2\sin(\pi + 2p) + \sin(2\pi + 4p)$

Omdat $2\sin(\pi + 2p) = -2\sin(2p)$ en $\sin(2\pi + 4p) = \sin(4p)$ geldt:

$f(\frac{1}{2}\pi + p) = -2\sin(2p) + \sin(4p)$

$f(\frac{1}{2}\pi - p) + f(\frac{1}{2}\pi + p) = (2\sin(2p) - \sin(4p)) + (-2\sin(2p) + \sin(4p)) =$

$2\sin(2p) - \sin(4p) - 2\sin(2p) + \sin(4p) = 0$

Conclusie: f_2 is puntsymmetrisch in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$

Opmerking: aantonen dat $\sin(\pi - 2p) = \sin(2p)$ kan ook met de goniometrie formules van het formuleblad: $\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$

Opmerking: aantonen voor één of enkele waarden van p dat $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) + f_2(\frac{1}{2}\pi + p) = 0$, levert geen scorepunten op.

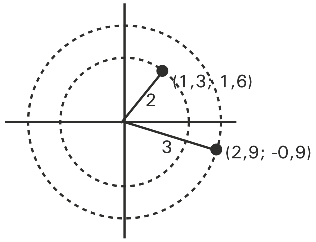
Wijzers van een uurwerk

28 *Bereken de x- en y-coördinaat van de grote wijzer en de kleine wijzer door t = 1,3 in te vullen in de gegeven bewegingsvergelijkingen.*
grote wijzer:
$x_g = 3\sin(2\pi \cdot 1{,}3) \approx 2{,}9$ en $y_g = 3\cos(2\pi \cdot 1{,}3) \approx -0{,}9$

kleine wijzer:

$x_k = 2\sin(\frac{1}{6}\pi \cdot 1{,}3) \approx 1{,}3$ en $y_k = 2\cos(\frac{1}{6}\pi \cdot 1{,}3) \approx 1{,}6$

De grote wijzer ligt op een cirkel met straal 3 en de kleine wijzer op een cirkel met straal 2.
Teken hiermee de posities van de twee wijzers.

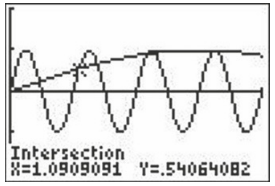


29 *Bereken, dus grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
eerste methode, exacte berekening:

er moet gelden $\sin(2\pi t) = \sin(\frac{1}{6}\pi t)$ en $\cos(2\pi t) = \cos(\frac{1}{6}\pi t)$

dus $2\pi t = \frac{1}{6}\pi t + 2k\pi$ dus $\frac{11}{6} t = 2k$ dus $t = \frac{12}{11}k$

dus het eerstvolgende tijdstip na $t = 0$ is $t = \frac{12}{11}$

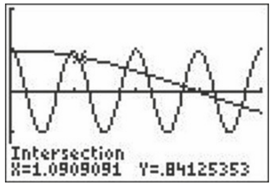


tweede methode, met grafische rekenmachine: (zie plot hiernaast)

plot $y_1 = \sin(2\pi t)$ en $y_2 = \sin(\frac{1}{6}\pi t)$ en lees snijpunten af

plot $y_3 = \cos(2\pi t)$ en $y_4 = \cos(\frac{1}{6}\pi t)$ en lees snijpunten af

Het eerste snijpunt na $t = 0$ dat bij beide hetzelfde is, ligt bij $t \approx 1{,}09$.



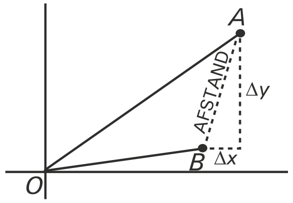
derde methode:
In een periode van 12 uur liggen de wijzers 11 keer over elkaar heen, steeds met gelijke intervallen.

Elk interval is dus $\frac{12}{11}$ uur dus $t = \frac{12}{11}$

30 *'Afstand' duidt op het gebruik van Pythagoras.*
Maak een duidelijke schets van de situatie met de horizontale en verticale afstanden.
Gebruik het formuleblad bij goniometrische formules.

afstand $= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$

$\sqrt{\left(3\sin(2\pi t) - 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\right)^2 + \left(3\cos(2\pi t) - 2\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\right)^2}$



tussenberekeningen

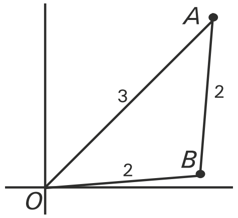
- $\left(3\sin(2\pi t) - 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\right)^2 = 9\sin^2(2\pi t) - 12\sin(2\pi t)\cdot\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 4\sin^2\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$
- $\left(3\cos(2\pi t) - 2\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\right)^2 = 9\cos^2(2\pi t) - 12\cos(2\pi t)\cdot\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 4\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$
- $9\sin^2(2\pi t) + 9\cos^2(2\pi t) = 9$
- $4\sin^2\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + 4\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi t\right) = 4$
- $-12\left(\sin(2\pi t)\cdot\sin\left(\frac{1}{6}\pi t\right) + \cos(2\pi t)\cdot\cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)\right) = \ldots$

  gebruik formuleblad: $\cos(t)\cdot\cos(u) + \sin(t)\cdot\sin(u) = \cos(t-u)$

  $\ldots = -12\left(\cos\left(2\pi t - \frac{1}{6}\pi t\right)\right) = -12\cos\left(1\frac{5}{6}\pi t\right)$

Conclusie: *afstand* $= \sqrt{9 - 12\cos\left(1\frac{5}{6}\pi t\right) + 4} = \sqrt{13 - 12\cos\left(\frac{11}{6}\pi t\right)}$

31 *Bereken dus grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
Ga na wat een 'gelijkbenige driehoek' inhoudt.
Lengte grote wijzer OA = 3 en lengte kleine wijzer OB = 2
ΔOAB is gelijkbenig als $AB = 2$ of $AB = 3$

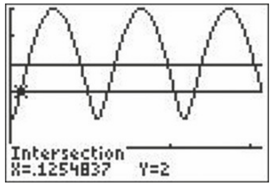


$AB = 2$ als $\sqrt{13 - 12\cos\left(\frac{11}{6}\pi t\right)} = 2$ dus $t \approx 0{,}125$

$AB = 3$ als $\sqrt{13 - 12\cos\left(\frac{11}{6}\pi t\right)} = 3$ dus $t \approx 0{,}214$

Gevraagd wordt naar het eerste tijdstip na $t = 0$.
Conclusie: $t \approx 0{,}125$
Geef duidelijk weer hoe de grafische rekenmachine gebruikt is om de vergelijking op te lossen.
In de plot hiernaast zijn de grafieken van

$y = \sqrt{13 - 12\cos\left(\frac{11}{6}\pi x\right)}$, *y = 2 en y = 3 getekend.*



©ThiemeMeulenhoff

Achtervolging

32 *Bereken, dus grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
Samenvallen, dus $x_P(t) = x_Q(t)$ en tegelijkertijd $y_P(t) = y_Q(t)$

Dit geldt als $\frac{11}{10}t = t + \frac{2}{3}\pi$ dus $\frac{1}{10}t = \frac{2}{3}\pi$ dus $t = \frac{20}{3}\pi \approx 20{,}9 \approx 21$ seconden

of

P draait rond met hoeksnelheid van $\frac{11}{10}$ rad.

Q draait rond met hoeksnelheid van 1 rad. *P* loopt dus per sec $\frac{1}{10}$ rad sneller dan *Q*

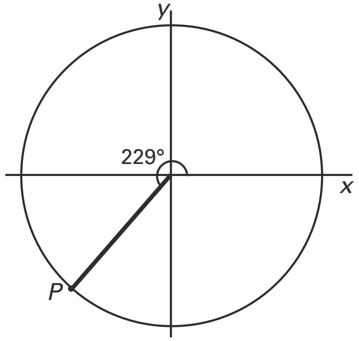
P moet $\frac{2}{3}\pi$ rad inlopen op *Q*.

Benodigde tijd is $\frac{\frac{2}{3}\pi}{\frac{1}{10}}$ seconden

Conclusie: *Q* wordt na ongeveer 21 seconden voor het eerst door *P* ingehaald.

33 De omtrek van de cirkel is 10π centimeter.
Er is over 20 cm gedraaid.

De bijbehorende hoek is dan $\frac{20}{10\pi}\cdot 360° \approx 229°$.



Tussen twee sinusgrafieken

34 *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Let op: met behulp van primitiveren dus primitieve moet opgesteld worden.
Let op: oppervlakte van gevraagde gebied is F(x) – G(x).
Primitieve van $f(x) = \sin(x)$ *is* $F(x) = -\cos(x)$

Primitieve van $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ *is* $G(x) = -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken snijden elkaar bij $x = \frac{1}{3}\pi$ *en* $x = \frac{4}{3}\pi$ *(gegeven)*

Oppervlakte van $V = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (\sin(x) - \sin(x + \frac{1}{3}\pi))\,dx = \left[-\cos(x) - -\cos(x + \frac{1}{3}\pi)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} =$

$(--\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 1 - -1 = 2$

Conclusie: oppervlakte gevraagde gebied is 2

©ThiemeMeulenhoff

5 Meetkunde

Wel of niet er op

Gegeven is de vectorvoorstelling van lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

1 Ga met een exacte berekening na of punt $P(-31, -73)$ op lijn l ligt.

2 Ga met een exacte berekening na of punt $Q(49, 123)$ op lijn l ligt.

Vectorvoorstelling maken

Gegeven zijn de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$

3 Lijn l gaat door de punten A en B. Stel algebraïsch de vectorvoorstelling van lijn l op.

4 Lijn m gaat door het midden van lijnstuk AB en staat loodrecht op dit lijnstuk.
Stel algebraïsch de vectorvoorstelling van lijn m op.

Enkele technieken: vergelijking, snijpunt en hoek berekenen.

Gegeven is de vectorvoorstelling van lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5 Stel algebraïsch de (gewone) vergelijking van lijn l op

Gegeven is de vectorvoorstelling van lijn m : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

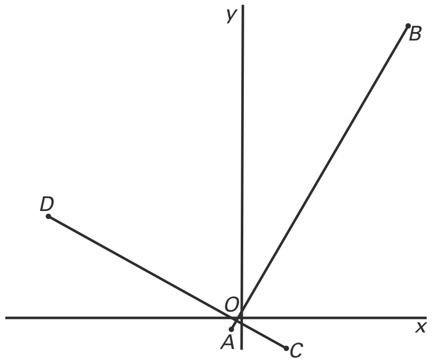
6 Bereken algebraïsch de scherpe hoek tussen de lijnen l en m (rond af op gehele graden).

7 Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen l en m (rond af op twee decimalen).

Loodrecht met vectoren

Gegeven zijn de punten $A(-2, -3)$, $B(38, 67)$, $C(10, -8)$ en $D(-45, 23)$.

8 Het lijkt of de vector $\overrightarrow{AB}$ loodrecht op de vector $\overrightarrow{CD}$ staat. Onderzoek met een berekening of dat wél of niet zo is.
Zo niet, bereken dan de hoek tussen de twee vectoren in één decimaal nauwkeurig.



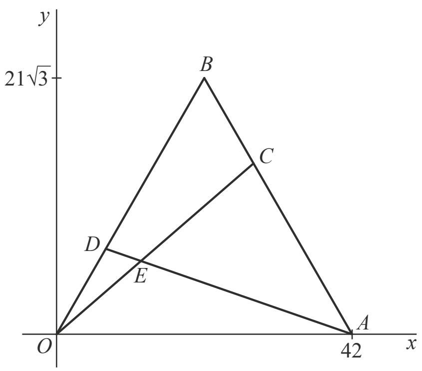
©ThiemeMeulenhoff

Loodrecht

Gegeven zijn de punten O, A en B met coördinaten $O(0, 0)$, $A(42, 0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$.
Driehoek OAB is gelijkzijdig.

Op zijde AB ligt punt C zo, dat $AC = \frac{2}{3} \cdot AB$ en op zijde BO ligt punt D zo, dat $BD = \frac{2}{3} \cdot BO$. Punt E is het snijpunt van de lijnstukken OC en AD. Zie figuur 1.

figuur 1

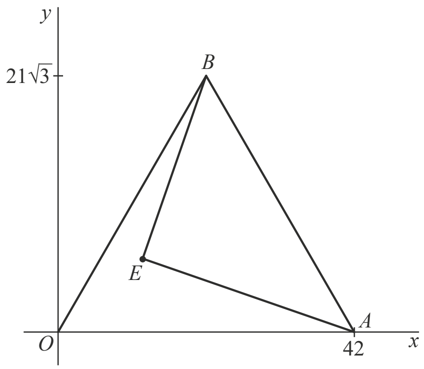


Punt E heeft coördinaten $E(12, 6\sqrt{3})$.

9 Laat met exacte berekeningen zien dat de x-coördinaat van E inderdaad gelijk is aan 12.

In figuur 2 is opnieuw driehoek OAB getekend, nu met de lijnstukken AE en BE.

figuur 2



10 Bewijs dat $\angle AEB = 90°$.

©ThiemeMeulenhoff

Snijpunt berekenen

Gegeven zijn de punten $A(-3, 2)$, $B(7, -3)$ en $P(2, 7)$.
Lijn l gaat door de punten A en B. Lijn m gaat door punt P en staat loodrecht op lijn l.
Het snijpunt van de lijnen l en m noemen we Q.

11 Bereken exact de afstand tussen de punten P en Q.

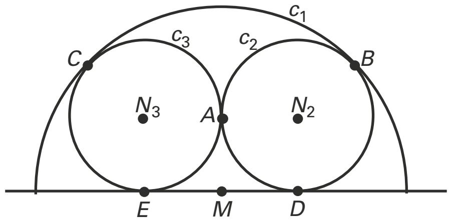
Lijnen in het platte vlak

Gegeven is de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lijn p is evenwijdig aan lijn l en snijdt de y-as in $(0, 9)$.
12 Stel algebraïsch de vergelijking op van lijn p.

Twee cirkels in een halve cirkel

Gegeven is een halve cirkel c_1 met straal 1 en middelpunt M. In deze halve cirkel zijn twee even grote hele cirkels c_2 en c_3 naast elkaar getekend, zodanig dat zij elkaar raken in A, de cirkelrand van c_1 raken in B en C en de middellijn van c_1 raken in D en E (zie figuur).
De cirkels c_2 en c_3 hebben een straal r en middelpunten N_2 en N_3.



13 Bereken exact de straal van de cirkels c_2 en c_3.

Een gelijkbenige, rechthoekige driehoek met daarin een cirkel

Gegeven is de gelijkbenige, rechthoekige driehoek OAB, met rechte hoek O en lengte rechthoekszijde a. In deze driehoek past de ingeschreven cirkel c, met straal r en middelpunt M.
De cirkel raakt de zijde AB in R, OA in P en OB in Q.
14 Druk a uit in r.

Spiegelen

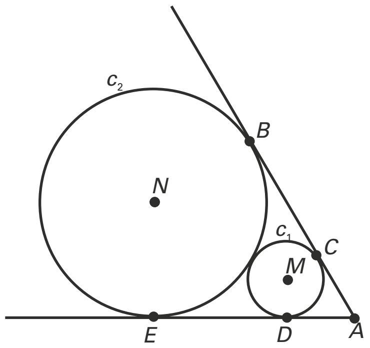
In een assenstelsel snijdt lijn m de x-as in punt $A(a, 0)$ en de y-as in punt $B(0, b)$.
Hierbij is $a > 0$ en $b > 0$.

15 Laat zien dat $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ een vergelijking van m is.

Het punt $O(0, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn m. Het spiegelbeeld van O is het punt P.
De oppervlakte van vierhoek $OAPB$ is gelijk aan $a \cdot b$. De oppervlakte van de rechthoek waarvan de zijden evenwijdig met de diagonalen van vierhoek $OAPB$ zijn is derhalve $2ab$. Dit is meetkundig te bewijzen. Dit bewijs wordt gevraagd in onderdeel 19.
16 Bewijs algebraïsch dat geldt: $|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = 2ab$.

Twee cirkels die elkaar raken

Gegeven is cirkel c_1 met straal 1 en middelpunt M en cirkel c_2 met straal 3 en middelpunt N en twee raaklijnen aan de cirkels. De twee cirkels raken elkaar.
B, C, D en E zijn de raakpunten van de cirkels met de raaklijnen.
17 Bereken de afstand van E tot A.



Sinusregel en cosinusregel

Gegeven is de driehoek ABC met $\angle B = 35°$ en $\angle C = 125°$ en zijde $AB = 8$.
18 Bereken de lengte van zijde BC.

Gegeven is de driehoek ABC met $\alpha = 40°$ en $a = 10$ en $b = 14$. Er zijn nu twee driehoeken mogelijk.
19 Bereken voor beide driehoeken de lengte van de zijde c en de bijbehorende hoek β.

Gegeven is de driehoek ABC met $a = 5$ en $b = 8$ en $\angle B$ is twee keer zo groot als $\angle C$.
20 Benader de lengte van zijde c in twee decimalen nauwkeurig.

Driehoek

Gegeven is de driehoek ABC met op zijde AB een punt D zodanig dat $CB = CD$.
Verder is gegeven dat $AC = 10$, $DB = 6$, $\angle A = 40°$.
21 Bereken de lengte van AD in twee decimalen nauwkeurig.

Loodrecht, twee cirkels

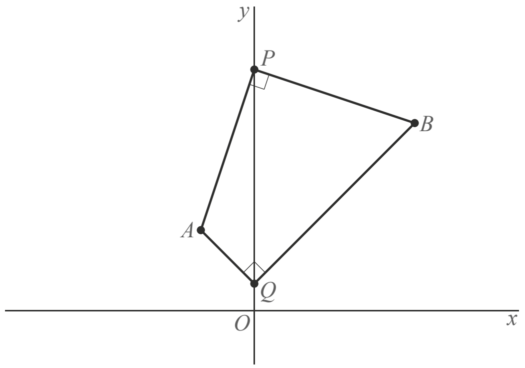
De twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ en $c_2 : (x - a)^2 + y^2 = 4$ met middelpunten respectievelijk O en M, snijden elkaar loodrecht in punt S, met S in het eerste kwadrant.

22 Bereken exact de x-coördinaat van punt M.

Twee punten

Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$ en $B(6, 7)$.
In figuur 3 zijn op de y-as de punten P en Q getekend waarvoor geldt dat $\angle APB = \angle AQB = 90°$.

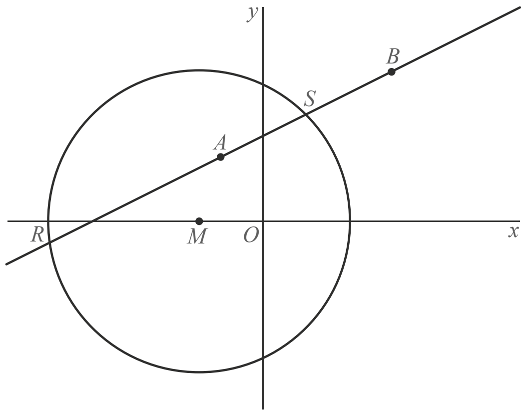
figuur 3



23 Bereken exact de coördinaten van P en Q.

In figuur 4 is de lijn door A en B getekend. Ook is een cirkel getekend met middelpunt $M(-3, 0)$. Deze cirkel snijdt de lijn door A en B in de punten R en S met $RS = 6\sqrt{5}$.

figuur 4



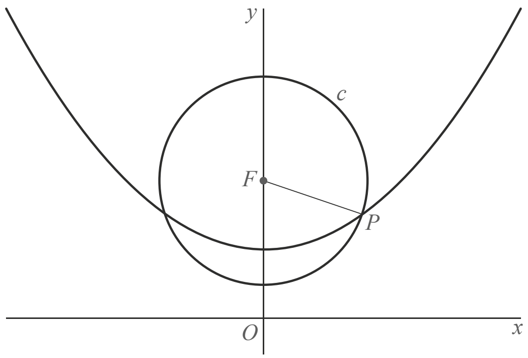
24 Bereken exact de straal van de cirkel.

©ThiemeMeulenhoff

Parabool en cirkel

Gegeven zijn het punt $F(0, 4)$ en de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$.
Punt P op de parabool ligt rechts van de y-as en heeft x-coördinaat p.
De cirkel c met middelpunt F gaat door P.
In figuur 5 is deze situatie voor een bepaalde waarde van p getekend.

figuur 5

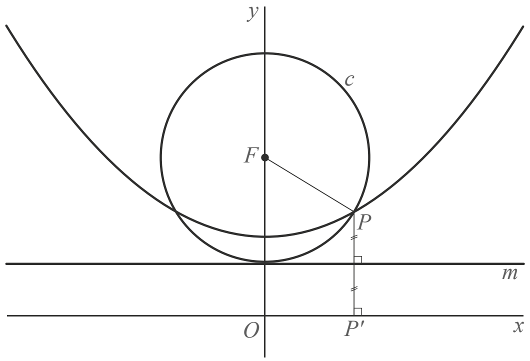


Voor de lengte van de straal FP van de cirkel geldt: $FP = \frac{1}{8}p^2 + 2$.

25 Bewijs dit.

Punt P' is de loodrechte projectie van P op de x-as en lijn m is de middelloodlijn van lijnstuk PP'.
Afhankelijk van de positie van punt P op de parabool hebben c en m nul, één of twee punten gemeenschappelijk. In figuur 2 is de situatie getekend waarin m en de cirkel elkaar op de y-as raken.

figuur 6



26 Bereken exact de waarde van p voor de in figuur 6 getekende situatie.

©ThiemeMeulenhoff

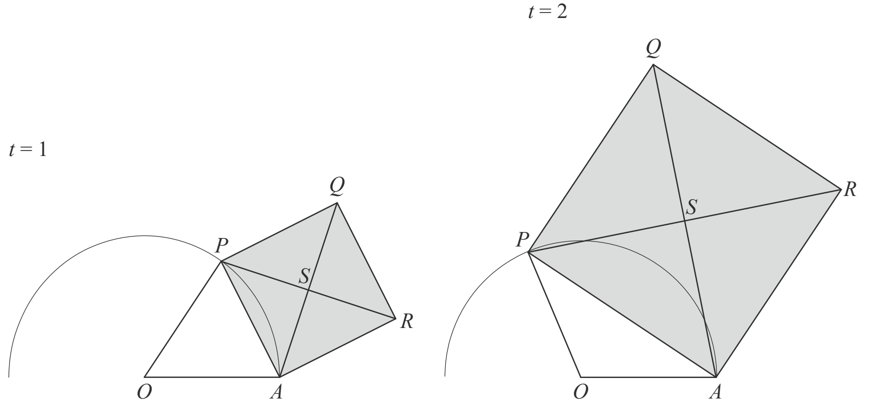
Vierkant op een driehoek

Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(2, 0)$.
Punt P beweegt over de halve cirkel met middelpunt O en straal 2 volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 < t < \pi$$

Tegen de zijde AP van driehoek OAP ligt een vierkant $ARQP$. Dit vierkant ligt buiten driehoek OAP. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van vierkant $ARQP$.
In figuur 7 is de situatie op de tijdstippen $t = 1$ en $t = 2$ weergegeven.

figuur 7



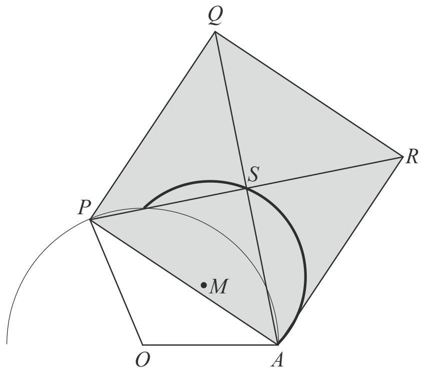
Er geldt: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$

27 Bewijs dit.

In figuur 8 is een deel getekend van de baan waarover S beweegt tijdens de beweging van punt P.
Figuur 2 doet vermoeden dat de baan van S een cirkel is met middelpunt $M(1, 1)$.

28 Bewijs dat de afstand van S tot het punt $M(1, 1)$ constant is.

figuur 8



Hints bij hoofdstuk 5

1 Maak een stelsel van twee vergelijkingen.
2 Maak een stelsel van twee vergelijkingen.
3 Bepaal de richtingsvector en kies een plaatsvector.
4 Wat weet je van twee vectoren die loodrecht op elkaar staan?
5 Bepaal de richtingscoëfficiënt.
6 Denk aan tangens of inproduct.
7 Maak een stelsel van twee vergelijkingen.
8 Denk aan inproduct.
9 Bereken eerst de coördinaten van D en C.
10 Loodrecht, dus het product van de richtingscoëfficiënten is –1.
11 Maak een schets en bepaal de richtingsvector van lijn m.
12 Evenwijdig. Bepaal de richtingsvector van lijn p.
13 Maak een tekening en geef bekende afstanden aan in de tekening.
14 Let op het verband tussen de grote driehoek, de kleine driehoeken en het vierkant.
15 Invullen.
15 Maak een schets. Bereken het snijpunt van lijn m en lijn l (door O, loodrecht op m).
17 Gebruik gelijkvormige driehoeken.
18 Sinusregel.
19 Gebruik sinus- en/of cosinusregel.
20 Sinusregel.
21 Zoek een rechthoekige driehoek.
22 Maak een schets.

23 Noem punt $P(0, y)$. Loodrecht: dus product van de richtingscoëfficiënten is –1.
24 De middelloodlijn van RS gaat door M en staat loodrecht op AB. Gebruik de vergelijking (of vectorvoorstelling) van de middelloodlijn, de gelijkbenige ΔRMS en Pythagoras.
25 P ligt op de parabool en $F(0,4)$. Gebruik Pythagoras $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.
26 Bepaal de middelloodlijn met behulp van de coördinaten van P. De middelloodlijn raakt de cirkel in het laagste punt van de cirkel. Geef de coördinaten van dit punt (uitgedrukt in p).

27 $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OP}$ zijn bekend, noteer ze als vector. Ga na hoe de vector $\overrightarrow{OS}$ opgebouwd kan worden uit $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OP}$.

28 $MS = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 5

Wel of niet er op

1 *Exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
$P(-31, -73)$ invullen geeft
$x = -1 + 2\alpha$ dus $-31 = -1 + 2\alpha$ dus $\alpha = -15$
$y = 2 + 5\alpha$ dus $-73 = 2 + 5\alpha$ dus $\alpha = -15$
Conclusie: punt $P(-31, -73)$ ligt op lijn l.

2 *Exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
$P(49, 123)$ invullen geeft
$x = -1 + 2\alpha$ dus $49 = -1 + 2\alpha$ dus $\alpha = 25$
$y = 2 + 5\alpha$ dus $123 = 2 + 5\alpha$ dus $\alpha = 24{,}2$ en dus $\alpha \neq 25$
Conclusie: punt $P(49, 123)$ ligt niet op lijn l.

Vectorvoorstelling maken

3 *Algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Richtingsvector = $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ en plaatsvector $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dus $l: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Opmerking: andere mogelijkheden zijn onder andere $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$,

$l: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

4 *Algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Midden M van $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$ is $M(4, 2\frac{1}{2})$, dus plaatsvector is $\begin{pmatrix}4\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Loodrecht op $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ dus richtingsvector is $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Conclusie: $m: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Enkele technieken: vergelijking, snijpunt en hoek berekenen.

5 *Algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met $y = ax + b$:

Richtingsvector is $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dus richtingscoëfficiënt is $\frac{3}{2}$

Dus l: $y = \frac{3}{2}x + b$ met plaatsector $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ levert $b = -5$

Conclusie: l: $y = \frac{3}{2}x - 5$

tweede methode met $ax + by = c$:

Richtingsvector is $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dus loodrecht is $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Dus l: $-3x + 2y = c$ met plaatsector $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ levert $c = -10$

Conclusie: l: $-3x + 2y = -10$

6 *Algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met behulp van tan α = rc:

Richtingsvector is $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dus $\alpha = \tan^{-1}(\frac{3}{2}) = 56{,}3°$

Richtingsvector is $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ dus $\beta = \tan^{-1}(-2) = -63{,}4°$

$\alpha + \beta = 56{,}3° + 63{,}4° = 119{,}7°$ is afgerond 120°
Conclusie: gevraagde scherpe hoek is $180° - 120° = 60°$

tweede methode met behulp van inproduct:

Inproduct levert $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \dfrac{-2+6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \approx 0{,}4961$

Dus $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60{,}3°$

Conclusie: gevraagde hoek is 60°

7 *Algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Snijden, dus $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$4 + 2\alpha = 1 - \beta$ dus $\beta = -4 - 2\alpha + 1 = -3 - 2\alpha$

$1 + 3\alpha = 3 + 2\beta$ substitutie van β levert: $1 + 3\alpha = 3 + 2(-3 - 2\alpha)$ dus $1 + 3\alpha = -3 - 4\alpha$

dus $\alpha = -\frac{4}{7}$

$\alpha = -\frac{4}{7}$ invullen in vergelijking met α levert $(2\frac{6}{7}, -\frac{5}{7})$

Conclusie: snijpunt is $(2\frac{6}{7}, -\frac{5}{7})$

Loodrecht met vectoren

8 $A(-2, -3)$, $B(38, 67)$ dus richtingsvector $\overrightarrow{AB}$ is $\begin{pmatrix}40\\70\end{pmatrix}$ vereenvoudigen geeft $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$

$C(10, -8)$ en $D(-45, 23)$ dus richtingsvector $\overrightarrow{CD}$ is $\begin{pmatrix}-55\\31\end{pmatrix}$

Het inproduct van deze twee vectoren $\begin{pmatrix}-55\\31\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = -220 + 217 = -3 \neq 0$

Conclusie: de vectoren staan niet loodrecht op elkaar.

of

Hoek berekenen met: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-55\\31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-55)^2+31^2}\cdot\sqrt{4^2+7^2}} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{3986}\cdot\sqrt{65}} = \dfrac{3}{\sqrt{259090}} \approx 0{,}0059$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{259090}}\right) = 89{,}7°$

Conclusie: de vectoren staan niet loodrecht op elkaar.

Loodrecht

9 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maak een tekening met daarin de coördinaten van B, C en D. Met behulp van de coördinaten van C en D kunnen de vergelijkingen van de lijnen door AD en OC opgesteld worden. Het snijden van de lijnen levert punt E. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden.

eerste methode met behulp van de vergelijkingen van de lijnen AD en OC:

$O(0, 0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$, dus $\overrightarrow{BO} = \begin{pmatrix} -21 \\ -21 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BO} = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$BD = \frac{2}{3} \cdot BO$ dus $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $D(7, 7\sqrt{3})$

$A(42, 0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$, dus $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -21 \\ 21 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$AC = \frac{2}{3} \cdot AB$ dus $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $C(28, 14\sqrt{3})$

$C(28, 14\sqrt{3})$ en $O(0, 0)$, dus vergelijking OC is $y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x$

$A(42, 0)$ en $D(7, 7\sqrt{3})$, dus $rc_{AD} = \frac{7\sqrt{3} - 0}{7 - 42} = -\frac{1}{5}\sqrt{3}$

vergelijking AD: $y = -\frac{1}{5}\sqrt{3} \cdot x + b$ met $A(42, 0)$ levert dit AD: $y = -\frac{1}{5}\sqrt{3} \cdot x + \frac{42}{5}\sqrt{3}$

Snijpunt E bepalen met $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x = -\frac{1}{5}\sqrt{3} \cdot x + \frac{42}{5}\sqrt{3}$ dus $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{5}x + \frac{42}{5}$

Dus: $5x = -2x + 84$
Conclusie: $x = 12$

tweede methode met behulp van de vectorvoorstelling van de lijnen AD en OC:

$O(0, 0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$, dus $\overrightarrow{BO} = \begin{pmatrix} -21 \\ -21 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BO} = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$BD = \frac{2}{3} \cdot BO$ dus $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $D(7, 7\sqrt{3})$

$A(42, 0)$ en $B(21, 21\sqrt{3})$, dus $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -21 \\ 21 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$AC = \frac{2}{3} \cdot AB$ dus $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $C(28, 14\sqrt{3})$

$C(28, 14\sqrt{3})$ en $O(0, 0)$, dus OC: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$A(42, 0)$ en $D(7, 7\sqrt{3})$, dus AD: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Snijpunt E bepalen met $\begin{cases} 42 - 5t = 2s \\ \sqrt{3} \cdot t = \sqrt{3} \cdot s \end{cases}$ dus $\begin{cases} 42 - 5t = 2s \\ t = s \end{cases}$ dus $\begin{cases} 42 - 5s = 2s \\ t = s \end{cases}$ dus

$\begin{cases} 42 = 7s \\ t = s \end{cases}$

Dus: $s = t = 6$, dus $E(12, 6\sqrt{3})$
Conclusie: $x = 12$

10 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Maak gebruik van het gegeven uit de vorige opgave: $E(12, 6\sqrt{3})$
Analyse: loodrecht, denk aan product van de hellingen is –1 of het inproduct van de vectoren is 0. Helling of richting van lijnstuk EB bepalen met $E(12, 6\sqrt{3})$

eerste methode met richtingscoëfficiënt:

$E(12, 6\sqrt{3})$en $B(21, 21\sqrt{3})$, dus helling EB is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{15\sqrt{3}}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$E(12, 6\sqrt{3})$en $A(42, 0)$, dus helling EA: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6\sqrt{3}}{30} = \frac{-\sqrt{3}}{5}$ (is gelijk aan helling AD)

Product bepalen: $\frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{5} = \frac{-5 \cdot 3}{15} = -1$
Conclusie: de lijnen staan loodrecht op elkaar

tweede methode met vectoren:

$E(12, 6\sqrt{3})$en $B(21, 21\sqrt{3})$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

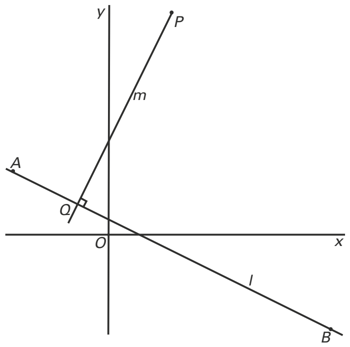
$E(12, 6\sqrt{3})$en $A(42, 0)$, dus $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 30 \\ -6 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Inproduct bepalen: $\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -6 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = 9 \cdot 30 + 15 \cdot \sqrt{3} \cdot -6 \cdot \sqrt{3} = 270 - 90 \cdot 3 = 0$

Conclusie: de lijnen staan loodrecht op elkaar

Snijpunt berekenen

11 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Maak een schets ter verduidelijking van de vraag.*
eerste methode



$A(-3, 2)$, $B(7, -3)$ dus richtingsvector $\overrightarrow{AB}$ is $\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$
vereenvoudigen geeft $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Lijn m staat loodrecht op l, dus richtingsvector van m is $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en m gaat door $P(2,7)$.

l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Het snijpunt Q berekenen:
$-3 + 2\alpha = 2 + \beta$ dus $-5 + 2\alpha = \beta$
$2 - \alpha = 7 + 2\beta$ dus $-5 - \alpha = 2\beta$
Substitutie van β levert: $-5 - \alpha = 2(-5 + 2\alpha)$
dus $5 = 5\alpha$ dus $\alpha = 1$

$\alpha = 1$ invullen levert Q is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Conclusie: afstand tussen $P(2, 7)$ en $Q(-1, 1)$ met Pythagoras levert: $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Tweede methode
$A(-3,2)$, $B(7,-3)$ dus richtingsvector $\overrightarrow{AB}$ is $\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ vereenvoudigen geeft $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dus
$l: x + 2y = 1$

$d(P, Q) = d(P, l) = \left|\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{2 + 2 \cdot 7 - 1}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{15}{\sqrt{5}}\right| = \frac{15}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$

Conclusie: afstand tussen $P(2, 7)$ en Q levert: $3\sqrt{5}$

Lijnen in het platte vlak

12 *eerste methode: gebruik $ax + by = c$ met $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ normaalvector van p.*

Plaatsvector is $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ en richtingsvector is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dus vectorvoorstelling $p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Richtingsvector is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus loodrecht is $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

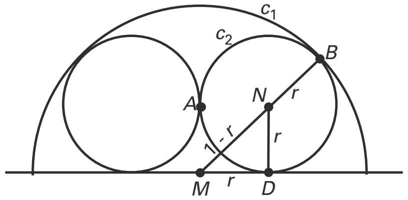
Geeft vergelijking $p: -3x + 4y = c$ door (0,9)
Conclusie: vergelijking $p: -3x + 4y = 36$

tweede methode: gebruik $y = ax + b$

richtingscoëfficiënt = $rc_l = rc_p = \frac{3}{4}$ en door (0, 9) dus $y = \frac{3}{4}x + 9$

Twee cirkels in een halve cirkel

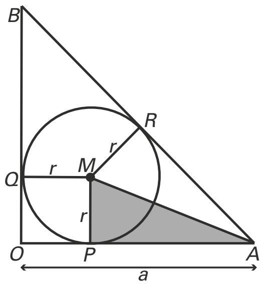
13 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maak een tekening en geef daar bekende afstanden (in dit geval r en 1) in aan.
$MN_2 = 1 - r$
Dus geldt in driehoek MN_2D: $r^2 + r^2 = (1 - r)^2$
dus $2r^2 = 1 - 2r + r^2$ dus $r^2 + 2r - 1 = 0$
abc-formule levert: $r = \sqrt{2} - 1$



Een gelijkbenige, rechthoekige driehoek met daarin een cirkel

14 *Analyse: maak een tekening en geef daar bekende afstanden (in dit geval r en a) in aan.*

kijk naar de oppervlakte van de kleine driehoek:
$\Delta MPA \cong \Delta MRA \cong \Delta MQB \cong \Delta MRB$ dus
$4 \cdot$ oppervlakte ΔMPA = oppervlakte OAB – oppervlakte $OPMQ$



Oppervlakte grote driehoek $OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2}a^2$

Oppervlakte $OPMQ = r^2$

Oppervlakte ΔMPA (grijze driehoek) = $\frac{1}{2} \cdot PA \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot (a - r) \cdot r$

Bovenstaande gegevens combineren geeft:

$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a - r) \cdot r = \frac{1}{2}a^2 - r^2$

dus $2 \cdot (a - r) \cdot r = \frac{1}{2}a^2 - r^2$

dus $2ar - 2r^2 = \frac{1}{2}a^2 - r^2$ dus $\frac{1}{2}a^2 - 2ar = -r^2$ dus $a^2 - 4ar = -2r^2$

kwadraatsplitsen geeft $(a - 2r)^2 - 4r^2 = -2r^2$ dus $(a - 2r)^2 = 2r^2$ dus

$a - 2r = \pm\sqrt{2r^2} = \pm r\sqrt{2}$ dus $a = 2r \pm r\sqrt{2}$

Conclusie: $a = 2r + r\sqrt{2}$
Opmerking: $a = 2r - r\sqrt{2} \approx 0{,}6 \cdot r$ vervalt, want dan wordt $a < r$

Spiegelen

15 *Vul de punten in.*
$A(a, 0)$ invullen in invullen in $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ geeft $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} = 1$ en dit klopt

geeft $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} = 1$ en dit klopt

$B(0, b)$ invullen in $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ geeft $\frac{0}{a} + \frac{b}{b} = 1$ en dit klopt

Conclusie: A en B liggen op $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

16 *Maak een schets. Bepaal de coördinaten van het spiegelpunt P van O door de lijn l te nemen door O die loodrecht op AB staat.*

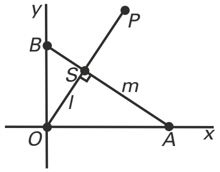
m: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ wordt $bx + ay = ab$ dus $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \perp m$

l is lijn loodrecht op m door (0, 0), dus richtingsvector l is $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, dus

$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

l en m snijden geeft $b \cdot (\lambda b) + a \cdot (\lambda a) = ab$ dus $\lambda \cdot (b^2 + a^2) = ab$ dus $\lambda = \frac{ab}{a^2 + b^2}$

dus $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \\ \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{OS}$ dus $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{2ab^2}{b^2 + a^2} \\ \frac{2a^2 b}{b^2 + a^2} \end{pmatrix}$

dus $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(\frac{2ab^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2b^4 + 4a^4b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{\sqrt{4a^2b^2(b^2 + a^2)}}{a^2 + b^2} =$

$\frac{2ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ dus $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Conclusie: $|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 2ab$

17 *Maak een schets. Maak gebruik van gelijkvormigheid en Pythagoras.*
Teken in de schets de stralen van de cirkels naar de raaklijnen en de verbinding van de middelpunten. Teken PM evenwijdig aan EA.
In de schets is MN gelijk aan de som van de stralen = 3 + 1 = 4
NP gelijk aan 2

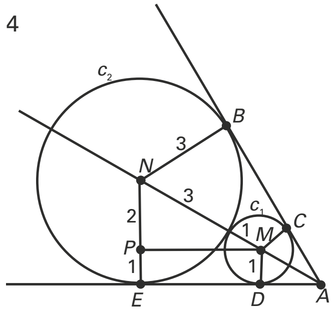
$PM = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ (Pythagoras, want $\angle P = \angle E = 90°$)

$\angle NMP = \angle NAE$ (F-hoeken) en $\angle MNP = \angle ANE$ (zelfde hoek)

dus $\Delta NMP \sim \Delta NAE$ (want hh)

Dus $\frac{NP}{NE} = \frac{NM}{NA} = \frac{PM}{EA}$ dus $\frac{2}{3} = \frac{4}{NA} = \frac{\sqrt{12}}{EA}$ dus

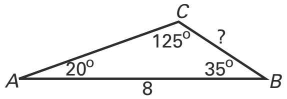
$2 \cdot EA = 3 \cdot \sqrt{12}$ dus $EA = 1\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} = 1\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$



Sinusregel en cosinusregel

18 *Maak een schets. Je weet een hoek en de overstaande zijde, dus gebruik de sinusregel.*
$\angle A = 180° - 35° - 125° = 20°$

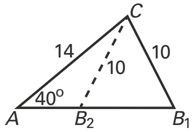
$\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)}$ dus $\frac{8}{\sin(125°)} = \frac{BC}{\sin(20°)}$ dus



$BC = \frac{8 \cdot \sin(20°)}{\sin(125°)} \approx 3{,}34$

19 *Maak een schets.*
eerste methode met de sinusregel:

$\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)}$ dus $\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(\angle B)}$ dus



$\sin\angle B = \frac{14 \cdot \sin(40°)}{10} \approx 0{,}8999...$ dus $\angle B \approx 64{,}145°$ of

$\angle B \approx 180° - 64{,}145° = 115{,}855°$

Als $\angle B \approx 64{,}145°$ dan geldt $\angle C = 180° - 64{,}145° - 40° = 75{,}855°$ en

$\frac{AB}{\sin(75{,}855°)} = \frac{10}{\sin(40°)}$ dus $AB = \frac{10 \cdot \sin(75{,}855°)}{\sin(40°)} \approx 15{,}09$

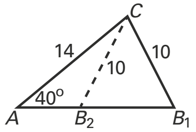
Als $\angle B \approx 115{,}855°$ dan geldt $\angle C = 180° - 115{,}855° - 40° = 24{,}145°$ en

$\frac{AB}{\sin(24{,}145°)} = \frac{10}{\sin(40°)}$ dus $AB = \frac{10 \cdot \sin(24{,}145°)}{\sin(40°)} \approx 6{,}36$

Conclusie: $\angle B \approx 64°$ en $c = AB = 15{,}1$ of $\angle B \approx 116°$ en $c = AB = 6{,}4$

tweede methode met de cosinusregel en sinusregel:

$\angle A$ is bekend dus gebruik: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\angle A$



$10^2 = 14^2 + c^2 - 2 \cdot 14 \cdot c \cdot \cos(40°)$ dus

$c^2 - 21{,}4492 \cdot c + 96 = 0$ *abc*-formule

$c = \frac{-21{,}4492 \pm \sqrt{21{,}4492^2 - 4 \cdot 96}}{2}$ dus $c = 6{,}36$ of $c = 15{,}09$

Als $c = AB = 6{,}36$ en $\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(\angle B)}$ dan geldt $\frac{6{,}36}{\sin(\angle C)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(\angle B)}$

$\sin(\angle C) = \frac{6{,}36 \cdot \sin(40°)}{10} \approx 0{,}4088$ dus $\angle C \approx 24{,}13°$ ($\angle C \approx 180° - 24{,}13° = 155{,}87°$)

(kan niet, ga dit na)

$\angle B = 180° - 24{,}13° - 40° = 115{,}87°$

Als $c = AB = 15{,}09$ en $\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(\angle B)}$ dan geldt $\frac{15{,}09}{\sin(\angle C)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(\angle B)}$

$\sin(\angle C) = \frac{15{,}09 \cdot \sin(40°)}{10} \approx 0{,}96997$ dus $\angle C \approx 75{,}92°$ of $\angle C \approx 104{,}08°$ (controleer welke hoek voldoet, let op als drie zijden bekend zijn, is er maar één driehoek mogelijk)

$\angle C \approx 75{,}92°$ dus $\angle B = 180° - 40° - 75{,}92° \approx 64{,}08°$

controle: $\frac{15{,}09}{\sin(75{,}92)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(64{,}08°)}$? klopt.

$\angle C \approx 104{,}08°$ dus $\angle B = 180° - 40° - 104{,}08° \approx 35{,}92°$

controle: $\frac{15{,}09}{\sin(104{,}08)} = \frac{10}{\sin(40°)} = \frac{14}{\sin(35{,}92°)}$? klopt niet.

Conclusie: $\angle B \approx 64°$ en $c = AB = 15{,}1$ of $\angle B \approx 116°$ en $c = AB = 6{,}4$

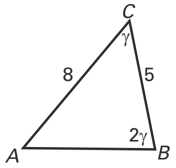
20 *Maak een schets. Twee decimalen, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
Bereken eerst $\angle C = \gamma$

$\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{A}{\sin(\angle B)}$ dus $\frac{AB}{\sin(\gamma)} = \frac{5}{\sin(180° - 3\gamma)} = \frac{8}{\sin(2\gamma)}$

Dus los op: $\frac{5}{\sin(180° - 3\gamma)} = \frac{8}{\sin(2\gamma)}$

$y_1 = \frac{5}{\sin(180° - 3x)}$

$y_2 = \frac{8}{\sin(2x)}$



Kies WINDOW bijvoorbeeld: [0, 90] × [0, 50]
Intersect geeft $x = \gamma \approx 47{,}15°$

$\frac{AB}{\sin(47{,}15°)} = \frac{8}{\sin(2 \cdot 47{,}15°)}$ dus $AB = \frac{8 \cdot \sin(47{,}15°)}{\sin(2 \cdot 47{,}15°)} \approx 5{,}88$

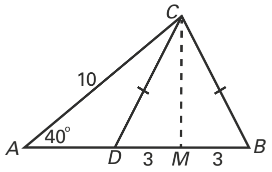
Conclusie: c is ongeveer 5,88

Driehoek

21 *Maak een schets. Twee decimalen, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
$DB = CB$ dus ΔDBC is een gelijkbenige driehoek.
Kies M het midden van DB, dan $\angle M = 90°$

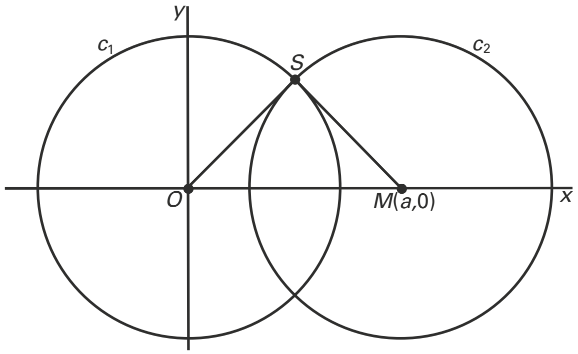
In ΔAMC geldt: $\cos\angle A = \cos(40°) = \frac{AM}{AC} = \frac{AD + 3}{10}$ dus

$AD + 3 = 10 \cdot \cos(40°) \approx 7{,}66$.
Conclusie: $AD = 4{,}66$



Loodrecht twee cirkels

22 *Maak een schets. Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*



eerste methode met behulp van richtingscoëfficiënten:

x-coördinaat snijpunt S is $\frac{1}{2}a$ en y-coördinaat snijpunt is $\sqrt{4-\left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}$ dus

$S\left(\frac{1}{2}a, \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}\right)$

richtingscoëfficiënt $OS = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}}{\frac{1}{2}a}$

richtingscoëfficiënt $MS = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}}{\frac{1}{2}a}$

loodrecht dus: $\frac{\sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}}{\frac{1}{2}a} \cdot \frac{-\sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}}{\frac{1}{2}a} = -1$ dus $\frac{-(4-\frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}a^2} = -1$ dus

$-(4-\frac{1}{4}a^2) = -\frac{1}{4}a^2$ dus $\frac{1}{2}a^2 = 4$

dus $a = \pm\sqrt{8}$

Conclusie: $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ($a = -\sqrt{8}$ vervalt)

tweede methode met behulp van richtingsvectoren:

x-coördinaat snijpunt S is $\frac{1}{2}a$ en y-coördinaat snijpunt is $\sqrt{4-\left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}$

dus $S\left(\frac{1}{2}a, \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2}\right)$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{MS} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2} \end{pmatrix}$$

loodrecht dus inproduct = 0, dus

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a \\ \sqrt{4-\frac{1}{4}a^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}a^2 + \left(4-\frac{1}{4}a^2\right) = -\frac{1}{2}a^2 + 4 = 0$$

Conclusie: $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ($a = -\sqrt{8}$ vervalt)

derde methode Pythagoras:

loodrecht dus $OS^2 + MS^2 = OM^2 = a^2$ en $OS = SM = 2$ (straal) dus $2^2 + 2^2 = a^2$

Conclusie: $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ($a = -\sqrt{8}$ vervalt)

Twee punten

23 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met behulp van de richtingscoëfficiënten:
Analyse: AP en BP zijn (delen van) lijnen, 90° dus loodrecht. Dus het product van de richtingscoëfficiënten van AP en BP moet –1 zijn. Noem het variabele punt P(0, y) en druk de richtingen van AP en BP uit in y. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden. Maak een schets.

$A(-2, 3)$, $B(6, 7)$ en $P(0, y)$ dus richting AP is $\frac{y-3}{2}$ en richting BP is $\frac{y-7}{-6}$

Product van deze richtingen moet -1 zijn dus $\frac{y-3}{2} \cdot \frac{y-7}{-6} = -1$

Dus $\frac{y^2-10y+21}{-12} = -1$ dus $y^2 - 10y + 21 = 12$ dus $y^2 - 10y + 9 = 0$ dus

$(y-9)(y-1) = 0$

Conclusie: $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$

tweede methode met behulp van vectoren:
Analyse: AP en BP zijn vectoren, 90° dus loodrecht. Dus het inproduct van de richtingsvectoren $\vec{AP}$ en $\vec{BP}$ moet 0 zijn. Noem het variabele punt P(0, y) en druk de richtingen van de vectoren AP en BP uit in y. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden. Maak een schets.

$A(-2, 3)$, $B(6, 7)$ en $P(0, y)$ dus richtingsvector $\vec{AP}$ is $\begin{pmatrix} 2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ en richtingsvector $\vec{BP}$ is $\begin{pmatrix} -6 \\ y-7 \end{pmatrix}$

Inproduct van deze richtingsvectoren moet 0 zijn dus $\begin{pmatrix} 2 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ y-7 \end{pmatrix} = 0$

Dus $-12 + (y-3)(y-7) = 0$ dus $y^2 - 10y + 9 = 0$ dus $(y-9)(y-1) = 0$

Conclusie: $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$

derde methode met behulp van Pythagoras:
Analyse: AP en BP zijn (delen van) lijnen, 90° dus loodrecht.
Dus moet volgens de stelling van Pythagoras gelden $AP^2 + PB^2 = AB^2$. Noem het variabele punt P(0, y) en druk de richtingen van AP en BP uit in y. Noteer de vergelijking die opgelost moet worden. Maak een schets.

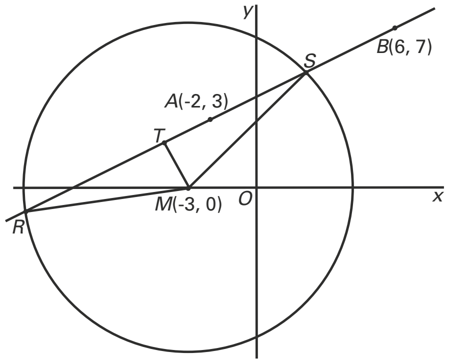
$A(-2, 3)$, $B(6, 7)$ en $P(0, y)$ dus lengte $AP = \sqrt{2^2 + (y-3)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 13}$,

lengte $BP = \sqrt{(-6)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{y^2 - 14y + 85}$ en lengte $AB = \sqrt{(6--2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{80}$

Dus $y^2 - 6y + 13 + y^2 - 14y + 85 = 80$ dus $y^2 - 10y + 9 = 0$ dus $(y-9)(y-1) = 0$

Conclusie: $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$

24 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: de vergelijking van de lijn door AB is op te stellen. Driehoek RMS is gelijkbenig want RM = SM = straal. De middelloodlijn van RS gaat door M. Stel de middelloodlijn van RS op. Gebruik de middelloodlijn, de gelijkbenige driehoek RMS en Pythagoras om de lengte van straal MS te bepalen.



$A(-2, 3)$ en $B(6, 7)$, dus

richtingscoëfficiënt$_{AB} = \frac{7-3}{6--2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Vergelijking lijn door AB: $y = \frac{1}{2}x + b$ door

$A(-2, 3)$ levert $y = \frac{1}{2}x + 4$

Middelloodlijn van RS gaat door $M(-3, 0)$ en staat loodrecht op AB.
Dus richtingscoëfficiënt $= -2$
Dus vergelijking middelloodlijn van RS: $y = -2x + b$ door $M(-3, 0)$ levert $y = -2x - 6$

Snijpunt T bepalen met $\frac{1}{2}x + 4 = -2x - 6$ levert $T(-4, 2)$

Afstand $MT = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-0)2} = \sqrt{5}$ (Pythagoras)*

Afstand $RS = 6\sqrt{5}$ dus afstand $TS = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Afstand $MS = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{50}$ (Pythagoras)

Conclusie: straal cirkel is $\sqrt{50}$

Opmerking: in deze opgave is het resultaat van de vorige opgave niet gebruikt.

Parabool en cirkel

25 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: punt P is een variabel punt: druk de x en y coördinaten van P uit in p.

Bereken een lengte dus gebruik Pythagoras $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$P(p, \frac{1}{8}p^2 + 2)$ en $F(0, 4)$ dus $\Delta x = p$ en $\Delta y = 4 - (\frac{1}{8}p^2 + 2) = -\frac{1}{8}p^2 + 2$

Afstand $FP = \sqrt{p^2 + (-\frac{1}{8}p^2 + 2)^2} = \sqrt{\frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + 4}$

Omdat $\left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2 = \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + 4$ geldt $\sqrt{\frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + 4} = \frac{1}{8}p^2 + 2$

Conclusie: straal is $\frac{1}{8}p^2 + 2$

Opmerking: formules voor FP en P zijn gegeven. Deze formules kunnen in de volgende opgave gebruikt worden.

* *Opmerking: de afstand MT van M tot lijn AB kan ook bepaald worden met behulp van de afstandformule.*
Lijn AB is $y = \frac{1}{2}x + 4$ *oftewel* $-x + 2y - 8 = 0$,

dus $d(M,AB) = \frac{|-x + 2y - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 0 - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

26 *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd worden middelloodlijn m en cirkel c. Druk lijn m uit in p, gebruik daarvoor de coördinaten van punt P. Het raakpunt is ook het laagste punt van de cirkel, druk de coördinaten van dit punt uit in p. Gebruik daarvoor de formule van de straal.
eerste methode met behulp van laagste punt cirkel ligt op middelloodlijn:

$P(p, \frac{1}{8}p^2 + 2)$ dus lengte $PP' = \frac{1}{8}p^2 + 2$ = lengte FP (zie onderdeel 16)

Lijn m is de middelloodlijn van PP', dus loopt halverwege PP', dus $m: y = \frac{1}{16}p^2 + 1$

Laagste punt van cirkel c ligt één straal onder middelpunt $F(0, 4)$ dus y-coördinaat is $y = 4 - (\frac{1}{8}p^2 + 2)$

Als lijn m en de cirkel elkaar raken moet gelden $\frac{1}{16}p^2 + 1 = 4 - (\frac{1}{8}p^2 + 2)$

Dus $\frac{1}{16}p^2 + 1 = 2 - \frac{1}{8}p^2$ dus $\frac{3}{16}p^2 = 1$ dus $p^2 = \frac{16}{3}$

Conclusie: $p = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (of $p = \frac{4}{3}\sqrt{3}$) (negatieve waarden van p vervallen)

tweede methode met behulp van vergelijking cirkel:

straal cirkel $= \frac{1}{8}p^2 + 2$ = lengte FP (zie onderdeel 16) en $F(0, 4)$ is middelpunt cirkel.

Dus vergelijking cirkel is $x^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2$

$P(p, \frac{1}{8}p^2 + 2)$ dus lengte $PP' = \frac{1}{8}p^2 + 2$. Lijn m is de middelloodlijn van PP', dus loopt halverwege PP', dus $m: y = \frac{1}{16}p^2 + 1$. Dus $(0, \frac{1}{16}p^2 + 1)$ ligt dus op de cirkel.

Invullen geeft

$0^2 + (\frac{1}{16}p^2 + 1 - 4)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2$ dus $(\frac{1}{16}p^2 - 3)^2 = \left(\frac{1}{8}p^2 + 2\right)^2$ dus

$\frac{1}{16}p^2 - 3 = \frac{1}{8}p^2 + 2$ of $\frac{1}{16}p^2 - 3 = -(\frac{1}{8}p^2 + 2)$

$\frac{1}{16}p^2 = -1$ (geen oplossing) of $\frac{3}{16}p^2 = 1$

$p^2 = \frac{16}{3}$

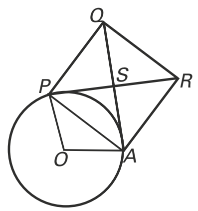
Conclusie: $p = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (of $p = \frac{4}{3}\sqrt{3}$) (negatieve waarden van p vervallen)

Vierkant op een driehoek

27 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: ga na hoe de vector $\overrightarrow{OS}$ opgebouwd kan worden door middel van de gegeven vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OP}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ zijn bekend

1	$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}$	$\overrightarrow{OA}$ is bekend en $\overrightarrow{AS}$ is nog niet bekend
2	$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ})$	$\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{PQ}$ beiden nog niet bekend
3	$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OP}$ beiden bekend, dus $\overrightarrow{AP}$ is nu ook bekend
4	$\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = \lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ en $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AP}$ (want vierkant)	$\overrightarrow{AP}$ is bekend dus $\overrightarrow{PQ}$ is nu ook bekend



Uit regel 3 volgt: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - 2 \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$

Uit regel 4 volgt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) + 2 \end{pmatrix}$

Uit regel 2 volgt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2\cos(t) - 2 \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) + 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 + \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) + 1 \end{pmatrix}$$

Uit regel 1 volgt: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 + \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$

Conclusie: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$

28 *Bewijs, dus bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: de afstand tussen de punten S en M moet constant zijn. Bereken deze afstand met behulp van Pythagoras.
$S = (1 + \cos(t) + \sin(t), 1 - \cos(t) + \sin(t))$ en $M = (1, 1)$
Voor de horizontale en verticale afstand tussen M en S geldt: $\Delta x = \cos(t) + \sin(t)$ en $\Delta y = -\cos(t) + \sin(t)$

$\text{MS} = \sqrt{(\cos(t) + \sin(t))^2 + (-\cos(t) + \sin(t))^2}$

$|\text{MS}| = \sqrt{\cos(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) + (\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 - 2\sin(t)\cos(t) + (\sin(t))^2} =$

$\sqrt{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{2}$

Conclusie: $|MS| = \sqrt{2}$ dus de afstand tussen S en M is constant.

©ThiemeMeulenhoff

Oefenen met hele examens, met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de goede antwoorden.

Deel 2a Examens met uitwerkingen

Examen 2016-I

Kettinglijn

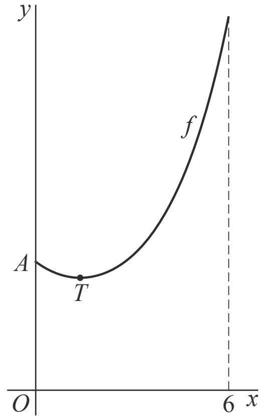
De functie f is gegeven door

$f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$.

In figuur 1 is de grafiek van f, een zogenaamde kettinglijn, op het domein [0, 6] getekend.
Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y-as.

De x-coördinaat van T is ongeveer 1,4.

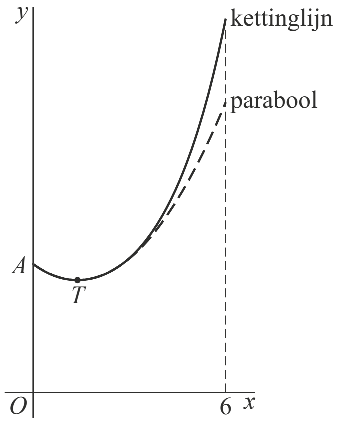
figuur 1



4p **1** Bereken exact de waarde van de x-coördinaat van T.

In figuur 2 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend.
In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.
Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ worden opgesteld.

figuur 2

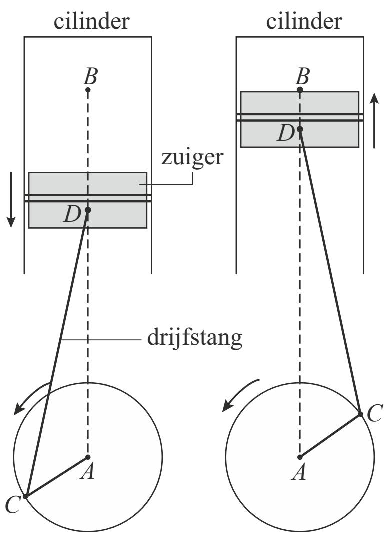


6p **2** Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.

Automotor

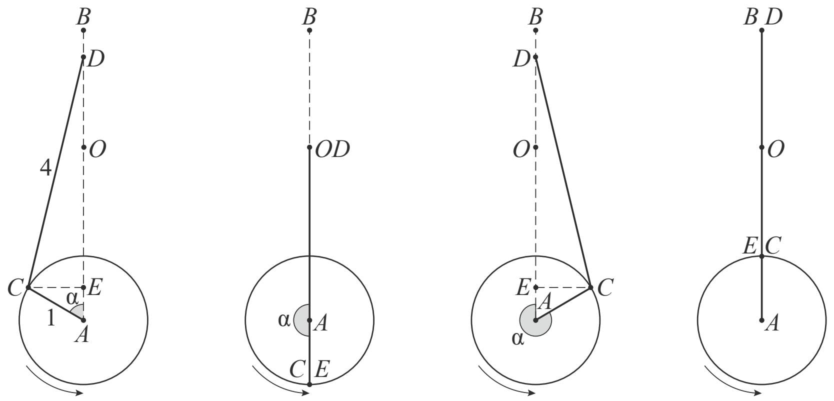
In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In figuur 1 zijn twee standen getekend. In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

figuur 1



In figuur 2 zijn vier standen schematisch getekend. *A* is een vast punt, *D* beweegt verticaal over *AB* en *C* draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt *A* waarbij *CD* een vaste lengte 4 heeft.
De grootte van hoek *CAD* (in radialen) noemen we α. Punt *E* is de loodrechte projectie van *C* op lijn *AD*.

figuur 2



Punt *D* beweegt op en neer tussen zijn hoogste punt *B* ($\alpha = 0$ en $\alpha = 2\pi$) en zijn laagste punt *O* ($\alpha = \pi$).

De afstand van *D* tot *B* noemen we *s*.
s hangt af van α. Er geldt: $s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$, met $0 \le \alpha \le 2\pi$.

5p **3** Bewijs dit voor de meest linkse van de in figuur 2 getekende standen (dus voor $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

In de techniek wordt *s* soms benaderd met behulp van de formule

$z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$.

Om te onderzoeken of de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$ een goede benadering voor *s* geeft, wordt het maximale verschil tussen *s* en *z* berekend.

3p **4** Bereken in drie decimalen nauwkeurig dit maximale verschil.

Zowel in *B* als in *O* is de snelheid van de zuiger gelijk aan 0. Tijdens de beweging wordt voor een waarde van α, met $0 < \alpha < \pi$, de maximale zuigersnelheid bereikt.

4p **5** Stel een formule voor de afgeleide van *z* op en bereken hiermee de maximale zuigersnelheid. Rond je antwoord af op twee decimalen.

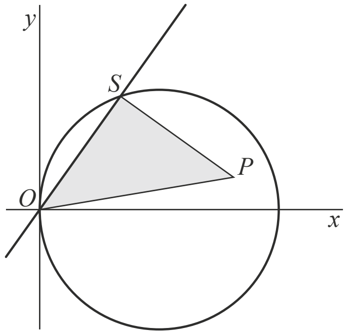
Een driehoek draaiend over een cirkel

Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Voor elke waarde van *a* is gegeven de lijn met vergelijking $y = ax$.
Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in *O* en *S*. De coördinaten van *S* zijn afhankelijk van *a*.

De vector $\overrightarrow{SP}$ is het beeld van $\overrightarrow{SO}$ bij een rotatie om *S* over 90°. Zie figuur 1, waarin ook driehoek *OPS* is weergegeven.
Voor de coördinaten van *P* geldt:

$x_P = \frac{2a + 2}{a^2 + 1}$ en $y_P = \frac{2a - 2}{a^2 + 1}$

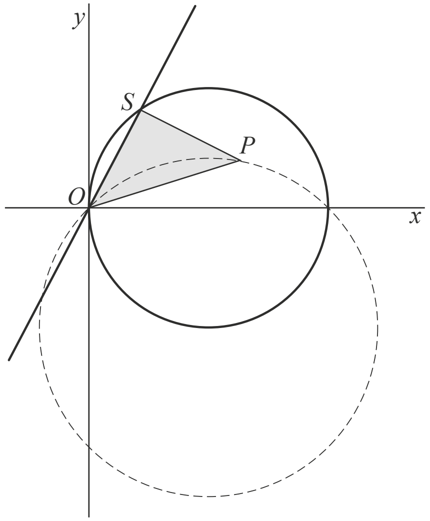
figuur 1



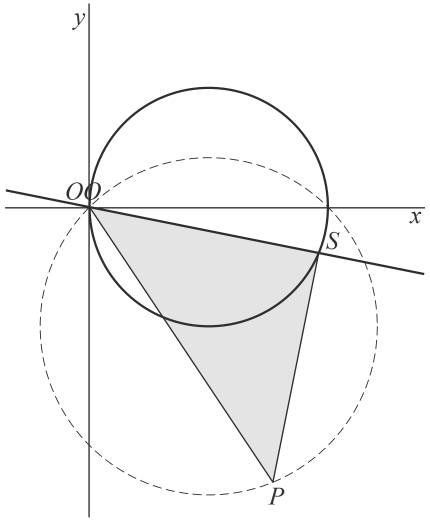
7p **6** Bewijs dat deze formules voor x_P en y_P correct zijn.

Bij elke waarde van *a* hoort een positie van *P*. In figuur 2 en figuur 3 is voor twee waarden van *a* deze positie getekend. Als *a* varieert, beweegt *P* over een cirkel door *O*. Deze cirkel is gestippeld getekend.

figuur 2



figuur 3



5p **7** Stel van de gestippelde cirkel een vergelijking op.

Er is een waarde van *a* waarvoor x_P maximaal is.

5p **8** Bereken exact deze waarde van *a*.

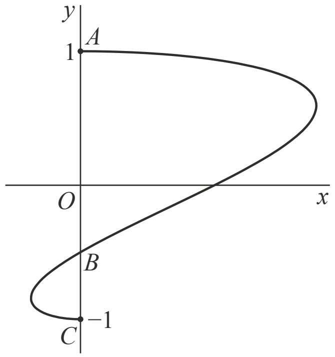
Snelheid op een baan

Voor $0 \leq t \leq \pi$ is de baan van het punt *P* gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van *P* weergegeven.

figuur



Op $t = 0$ bevindt *P* zich in het hoogste punt *A*(0, 1) van de baan.
Op $t = \pi$ bevindt *P* zich in het laagste punt *C*(0, –1) van de baan.
Tussen $t = 0$ en $t = \pi$ snijdt de baan de *y*-as één keer in het punt *B*.

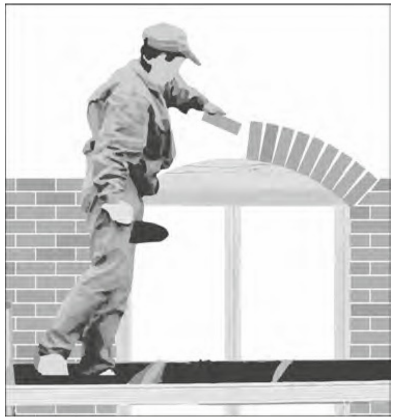
8p **9** Bereken exact de snelheid van *P* in punt *B*.

Metselboog

In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Zie figuur 1.
Om deze bakstenen tijdens de bouw op de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruikgemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog. Zie figuur 2.

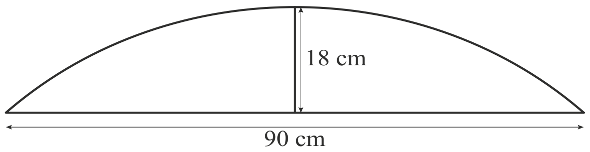
figuur 1

figuur 2



De metselaar vraagt aan de timmerman om een metselboog te maken.
De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In figuur 3 is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.

figuur 3



De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen.

5p **10** Bereken algebraïsch deze straal. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

Vierkant bij een grafiek

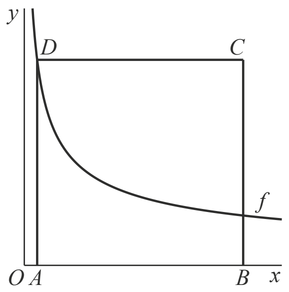
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x-as en het hoekpunt D op de grafiek van f.
Zie figuur 1.

De x-coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b, met $0 < a < b$.

De coördinaten van D zijn dan $(a, \frac{16}{\sqrt{a}})$.

figuur 1

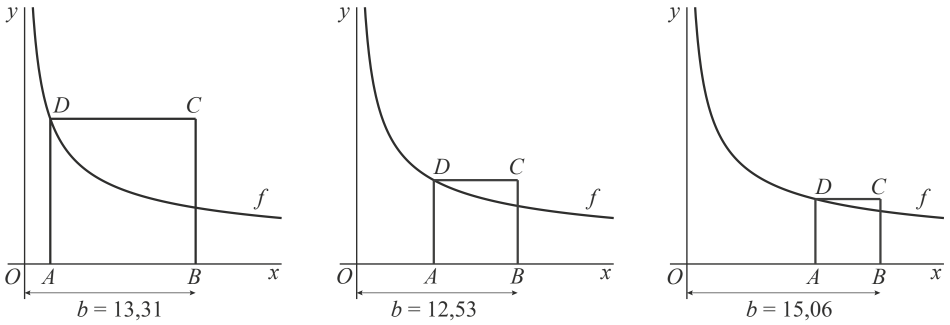


Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16.
V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt.
Vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as.

5p **11** Bereken exact de inhoud van het bijbehorende omwentelingslichaam.

In figuur 2 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.

figuur 2



Bij de getekende situaties is de afstand van punt B tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand b hangt af van a, de x-coördinaat van A. Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.

5p **12** Bereken exact de minimale waarde van b.

Limietpunt

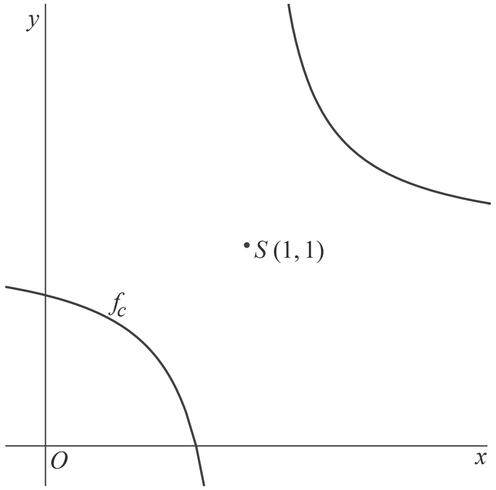
Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door:

$$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$$

3p **13** Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

Punt S is het punt met coördinaten (1, 1).
In figuur 1 is voor een waarde van c de grafiek van f_c weergegeven.

figuur 1



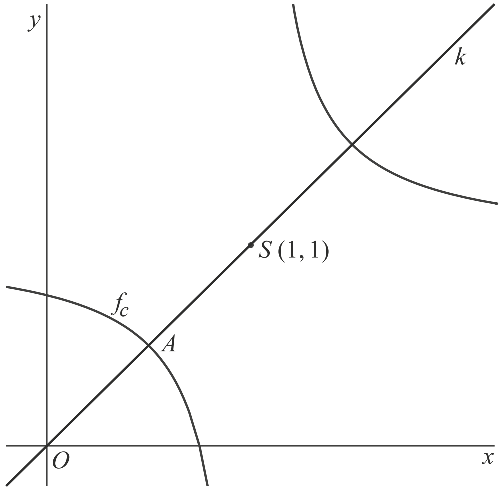
De grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S als voor elke waarde van p geldt:

$$\frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = 1$$

3p **14** Bewijs met behulp van deze formule dat voor elke waarde van c de grafiek van f_c puntsymmetrisch is ten opzichte van S.

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = x$. Lijn k snijdt de grafiek van f_c in twee punten.
Punt A is het linker snijpunt.
In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met A en k.

figuur 2



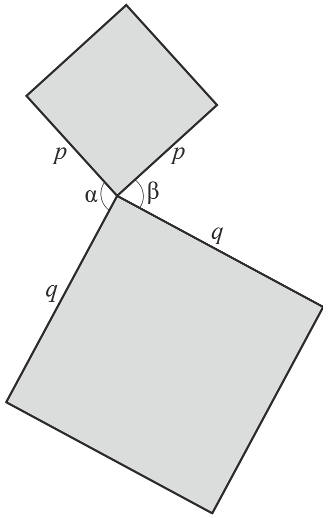
Als c groter wordt, verschuift A over lijn k, waarbij zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A toenemen.
Als c onbegrensd toeneemt, naderen zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A tot een limietwaarde. Het punt A nadert daarom tot een vast punt: het limietpunt van A.

5p **15** Druk de coördinaten van A uit in c en bewijs met behulp van deze coördinaten dat S het limietpunt is van A.

Vier vierkanten

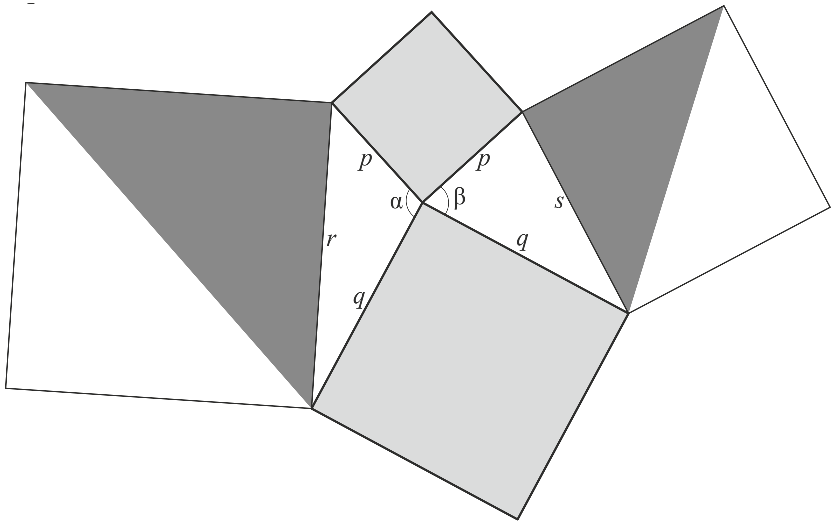
Gegeven zijn twee vierkanten, één met zijde p en één met zijde q. De vierkanten hebben één hoekpunt gemeenschappelijk.
De hoeken die de zijden van de vierkanten met elkaar maken in het gemeenschappelijke hoekpunt noemen we α en β. Zie figuur 1.

figuur 1



Figuur 2 is een uitbreiding van figuur 1. Er zijn twee vierkanten toegevoegd:
- een vierkant met zijde r dat met elk van de vierkanten uit figuur 1 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft;
- een vierkant met zijde s dat met elk van de vierkanten uit figuur 1 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft.

figuur 2



In figuur 2 zijn de vierkanten met zijden p en q lichtgrijs gekleurd; van elk van de vierkanten met zijden r en s is de helft donkergrijs gekleurd.

6p **16** Bewijs dat de totale oppervlakte van de lichtgrijze delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de donkergrijze delen.

Hints bij examen 2016-I

1. Top, dus bereken algebraïsch $f'(x) = 0$.
2. Bepaal de vergelijking van de parabool met behulp van de top T en punt A. Maak daarmee de formule voor het verschil van $f(x)$ en de parabool.
3. Gebruik ΔAEC om AE en EC in a uit te drukken. Gebruik in ΔCED de stelling van Pythagoras.
4. $s - z$ moet maximaal zijn: top bepalen met de grafische rekenmachine. Het verschil is minimaal, dus houd hier rekening mee bij het instellen van het WINDOW.
5. Snelheid is z'. Het maximum van de snelheid wordt gevraagd. GR toegestaan.
6. Vectoren zijn even lang en staan loodrecht op elkaar, dus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.
7. Bepaal drie punten op de cirkel. Het snijpunt van de middelloodlijnen is het middelpunt.
8. Maximaal, dus afgeleide = 0. Gebruik de quotiëntregel.
9. Bereken eerst de t-waarde van B. Snelheid = $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$.
10. Maak een schets van de cirkel en teken de stralen. Denk aan Pythagoras.
11. Vierkant, dus $AD = AB$. Inhoud, dus maak gebruik van $I = \pi \int_a^b (y^2)\, dx$.
12. Druk b uit in a. Minimaal, dus bereken $b' = 0$.
13. Inverse dus bewijs $f(f^{inv}(x)) = x$ of maak gebruik van spiegelen in de lijn $y = x$, dus verwissel de x en y en herschrijf tot $y = \ldots$
14. Bereken eerst $f_c(1 + p)$ en $f_c(1 - p)$.
15. Druk eerst x in c uit.
16. Denk aan het gebruik van de cosinusregel om r en s uit te drukken in p en q.

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2016-I

Kettinglijn

4p **1** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: top, dus differentiëren en gelijkstellen aan 0.

eerste methode:

$f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\frac{1}{2}$ dus $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+-\frac{1}{2}\cdot 2e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}$ [1p]

Top als $f'(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}=0$ dus $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=e^{-\frac{1}{2}x}$ [1p]

Beide zijden vermenigvuldigen met $e^{\frac{1}{2}x}$ levert $\frac{1}{4}e^{x}=e^{0}=1$ [1p]
Dus $e^x=4$
Conclusie: $x=\ln(4)$ [1p]

tweede methode:

$f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\frac{1}{2}$ dus $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+-\frac{1}{2}\cdot 2e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}$ [1p]

Top als $f'(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}=0$ dus $e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{4}-e^{-x})=0$ [1p]

Dus $\frac{1}{4}-\frac{1}{e^x}=0$ (en $e^{\frac{1}{2}x}=0$ kan niet)

Dus $\frac{1}{4}=\frac{1}{e^x}$ dus $e^x=4$ [1p]

Conclusie: $x=\ln(4)$ [1p]

6p **2** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Opmerking: de x-coördinaat van top T is in de opgave hiervoor gegeven. Dit gegeven kan in deze opgave gebruikt worden.
Analyse: parabool gaat door A en T, dus vergelijking parabool opstellen.
eerste methode met behulp van topvergelijking $y=a(x-b)^2+c$:
Parabool gaat door A en T, dus vergelijking parabool opstellen.

A: $x=0$ en $y=f(0)=\frac{1}{2}e^0+2e^0+1\frac{1}{2}=4$ dus $A(0, 4)$ [1p]

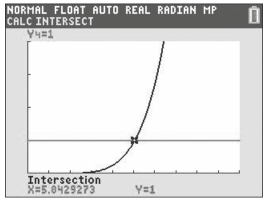
T: $x=\ln(4)$ en $y=f(\ln(4))=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot\ln(4)}+2e^{-\frac{1}{2}\cdot\ln(4)}+1\frac{1}{2}$ (maak gebruik van $e^{\ln(a)}=a$)

$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot\ln(4)}+2e^{-\frac{1}{2}\cdot\ln(4)}+1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\ln(4)^{\frac{1}{2}}}+2e^{\ln(4)^{-\frac{1}{2}}}+1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\ln(2)}+2e^{\ln(\frac{1}{2})}+1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot2+2\cdot\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$

Top $T(\ln(4), 3\frac{1}{2})$ [1p] dus topvergelijking parabool is $y=a(x-\ln(4))^2+3\frac{1}{2}$ [1p]

Parabool gaat ook door $A(0, 4)$ dus $4=a(0-\ln(4))^2+3\frac{1}{2}$ dus

$a=\dfrac{\frac{1}{2}}{\ln^2(4)}=\dfrac{1}{2\ln^2(4)}$



Dus vergelijking parabool: $y=\dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x-\ln(4))^2+3\frac{1}{2}$ [1p]

Er moet nu gelden $f(x)-y=1$ oftewel

$\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\frac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x-\ln(4))^2+3\frac{1}{2}\right)=1$ [1p]

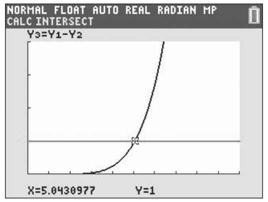
Oplossen met de rekenmachine (intersect) levert $x\approx5{,}1$ (of $x\approx5{,}0$) [1p]

Opmerking: in plaats van ln(4) mag ook 1,4 (of nauwkeuriger) gebruikt worden. De op te lossen vergelijking wordt dan $\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\frac{1}{2}\right)-\left(0{,}255(x-1{,}4)^2+3\frac{1}{2}\right)=1$

Let op het gevraagde aantal decimalen.

tweede methode met behulp van $y=ax^2+bx+c$:
Parabool gaat door A en T, dus vergelijking parabool opstellen.
A: $x=0$ en $y=f(0)=\frac{1}{2}e^0+2e^0+1\frac{1}{2}=4$ dus $A(0, 4)$ [1p]

T: $x=1{,}4$ en $y=f(1{,}4)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot1{,}4}+2e^{-\frac{1}{2}\cdot1{,}4}+1\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ [1p]



Vergelijking parabool is $y=ax^2+bx+c$
$A(0, 4)$ dus vergelijking parabool is $y=ax^2+bx+4$ [1p]

$T(1{,}4; 3\frac{1}{2})$ dus vergelijking parabool is $3\frac{1}{2}=1{,}96\cdot a+1{,}4\cdot b+4$

Bovendien geldt $y'=2ax+b$ en voor de top $T(1{,}4; 3\frac{1}{2})$ geldt dus $0=2{,}8a+b$ en dus $b=-2{,}8a$

De twee formules $3\frac{1}{2}=1{,}96\cdot a+1{,}4\cdot b+4$ en $b=-2{,}8a$ leveren

$3\frac{1}{2}=1{,}96\cdot a+1{,}4\cdot-2{,}8\cdot a+4$

$-\frac{1}{2}=-1{,}96\cdot a$ dus $a\approx0{,}255$ en $b\approx-0{,}714$

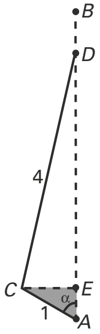
Dus vergelijking parabool: $y=0{,}255x^2-0{,}714x+4$ [1p]

Er moet nu gelden $f(x)-y=1$ oftewel $(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\frac{1}{2})-(0{,}255x^2-0{,}714x+4)=1$ [1p]

Oplossen met de rekenmachine levert $x\approx5{,}1$ (of $x\approx5{,}0$) [1p]
Opmerking: in plaats van 1,4 (of nauwkeuriger) mag ook ln(4) gebruikt worden.
Let op het gevraagde aantal decimalen.

Automotor

5p **3** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Gegeven is $CD=4$ en $CA=1$ (straal van de cirkel).
Er geldt $AE+ED+DB=AB$ dus $DB=s=AB-AE-ED$ [1p]
B is hoogste punt, dus $AB=1+4=5$ [1p]
$AE=\cos(\alpha)$ en $EC=\sin(\alpha)$ (zie ΔAEC) [1p]

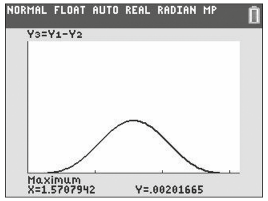


$ED=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{4^2-(\sin(\alpha))^2}=\sqrt{16-\sin^2(\alpha)}$ [1p]

Conclusie: $s=AB-AE-ED=5-\cos(\alpha)-\sqrt{16-\sin^2(\alpha)}$ [1p]
Let op: de formule voor s bestaat uit drie delen. Verwerk in je bewijs elk van deze drie delen (noem dus ook de herkomst van de "5").

3p **4** *Bereken in drie decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: grootste verschil berekenen, dus bereken top (maximum of minimum van s – z).
Gevraagd wordt het grootste verschil tussen s en z.
Dus $s-z$ moet maximaal zijn, dus de top van $s-z$ berekenen (maximum of minimum).

$y_1=(5-\cos(x)-\sqrt{16-(\sin(x))^2})-(1-\cos(x)+\frac{1}{8}(\sin(x))^2)$ [1p]



Kies WINDOW bijvoorbeeld: [0; 3,14] × [0; 0,005]
Er zijn geen negatieve waarden, dus maximum van $s-z$ bepalen met Calc max. [1p]
Het maximum 0,002 wordt bereikt bij $x=\alpha=1{,}571$
Conclusie: maximale verschil is 0,002 [1p]
Let op: het maximale verschil kan ook negatief zijn.
Let op het gevraagde aantal decimalen.

4p **5** *Bereken in twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: afgeleide moet gebruikt worden. Snelheid wordt gegeven door deze afgeleide z'.
Opmerking: er is een tweede formule voor z gegeven. Dit gegeven kan in deze opgave gebruikt worden.
eerste methode:
De formule voor de snelheid is z'.

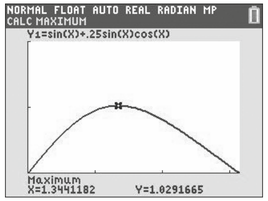
$z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}(\sin(\alpha))^2$ dus

$z' = \sin(\alpha) + 2 \cdot \frac{1}{8}\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha) + \frac{1}{4}\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ [2p]

De snelheid moet maximaal zijn dus z' moet maximaal zijn.

$y_1 = \sin(x) + \frac{1}{4}\sin(x) \cdot \cos(x)$

Kies WINDOW bijvoorbeeld: [0; 3,14] × [0; 2]
Calc max levert $x = \alpha = 1{,}34$ en $z' = 1{,}03$ [2p]
Conclusie: maximale snelheid is 1,03
Let op het gevraagde aantal decimalen.



tweede methode:
De formule voor de snelheid is z'.

$z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}(\sin(\alpha))^2$ dus

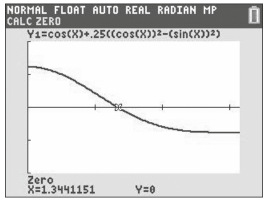
$z' = \sin(\alpha) + 2 \cdot \frac{1}{8}\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha) + \frac{1}{4}\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ [2p]

De snelheid z' moet maximaal zijn dus de tweede afgeleide z'' moet 0 zijn,

$z'' = \cos(\alpha) + \frac{1}{4}((\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2)$ [1p]

$y_1 = \cos(x) + \frac{1}{4}((\cos(x))^2 - (\sin(x))^2)$

Kies WINDOW bijvoorbeeld: [0; 3,14] × [–2; 2]
Calc zero levert $x = \alpha = 1{,}34$ en deze waarde invullen in snelheid z' levert $z' = 1{,}03$ [1p]
Conclusie: maximale snelheid is 1,03
Let op het gevraagde aantal decimalen.



Een driehoek draaiend over een cirkel

7p **6** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: loodrechte vectoren die even lang zijn, maak gebruik van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.
De twee componenten van de vectoren kunnen x_S *en* y_S *genoemd worden. Bepaal het snijpunt S(x,y) van cirkel en lijn. Druk* x_P *en* y_P *uit in* x_S *en* y_S

Gegeven zijn cirkel: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ en de lijn $y = ax$
Voor snijpunt S geldt dus: $(x-1)^2 + (ax)^2 = 1$ [1p]
Coördinaten S bepalen dus los op: $x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 = 1$ dus $x^2 - 2x + a^2x^2 = 0$ dus
$x(x - 2 + a^2x) = 0$ [1p]
Dus geldt: $x = 0$ (oorsprong) of $x - 2 + a^2x = 0$

$x + a^2x = 2$ dus $x(1 + a^2) = 2$ en dus $x_s = \frac{2}{1+a^2} = \frac{2}{a^2+1}$ [1p] en

$y_s = ax = a \cdot \frac{2}{1+a^2} = \frac{2a}{a^2+1}$ [1p]

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{SP}$ en ze zijn even lang, dus

$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} y_S \\ -x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{a^2+1} \\ -\frac{2}{a^2+1} \end{pmatrix}$ [1p] en $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$ dus

$x_p = x_s + y_s$ en $y_p = y_s - x_s$

$x_p = x_s + y_s = \frac{2}{a^2+1} + \frac{2a}{a^2+1} = \frac{2a+2}{a^2+1}$ [1p]

$y_p = y_s - x_s = \frac{2a}{a^2+1} - \frac{2}{a^2+1} = \frac{2a-2}{a^2+1}$ [1p]

Conclusie: $x_p = \frac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_p = \frac{2a-2}{a^2+1}$

5p **7** *Analyse: als drie punten van de cirkel bekend zijn, kan het middelpunt van de cirkel bepaald worden met behulp van de middelloodlijnen.*
Opmerking: er zijn twee formules gegeven voor de x en y coördinaten van punt P op de gevraagde cirkel. Dit gegeven kan in deze opgave gebruikt worden.

eerste methode met behulp van de snijpunten van de cirkel met de twee assen:
De snijpunten met de assen bepalen met behulp van $x_p = \frac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_p = \frac{2a-2}{a^2+1}$

Snijpunten x-as bepalen met $y_p = 0$ dus $\frac{2a-2}{a^2+1} = 0$ dus $2a - 2 = 0$ dus $a = 1$ dus

$x_P = 2$ (en $x_P = 0$)

Snijpunten y-as bepalen met $x_p = 0$ dus $\frac{2a+2}{a^2+1} = 0$ dus $2a + 2 = 0$ dus $a = -1$ dus

$y_P = -2$ (en $y_P = 0$) [1p]
Drie punten van de cirkel zijn nu (0, 0), (2, 0) en (0, –2).
Middelloodlijn van (0, 0) en (2, 0) is $x = 1$.
Middelloodlijn van (0, 0) en (0, –2) is $y = -1$ [1p]
Snijpunt van de middelloodlijnen is het middelpunt is dus $M(1, -1)$ [1p]
Straal = $MO = \sqrt{2}$ (Pythagoras) [1p]
Conclusie: gevraagde cirkel is $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ [1p]

tweede methode met behulp van drie punten van de cirkel:
(0, 0) is een punt van de cirkel, twee andere punten bepalen met behulp van

$x_p = \frac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_p = \frac{2a-2}{a^2+1}$

Neem bijvoorbeeld $a = 0$: $x = \frac{2 \cdot 0 + 2}{0^2+1} = 2$ en $y = \frac{2 \cdot 0 - 2}{0^2+1} = -2$, dus cirkel door (2, –2)

Neem bijvoorbeeld $a = 1$: $x = \frac{2 \cdot 1 + 2}{1^2+1} = 2$ en $y = \frac{2 \cdot 1 - 2}{1^2+1} = 0$, dus cirkel door (2, 0) [1p]

Drie punten van de cirkel zijn nu (0, 0), (2, –2) en (2, 0).
Middelloodlijn van (0, 0) en (2, –2) is $y = x - 2$ en middelloodlijn van (0, 0) en (2, 0) is $x = 1$. [1p]
Snijpunt van de middelloodlijnen $y = x - 2$ en $x = 1$ is $M(1, -1)$ [1p]
Straal = $MO = \sqrt{2}$ (Pythagoras) [1p]
Conclusie: gevraagde cirkel is $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ [1p]

5p **8** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode:
Analyse: maximaal dus afgeleide gelijkstellen aan 0. Quotiëntregel.

$x_p = \dfrac{2a+2}{a^2+1}$ dus $x'_p = \dfrac{2(a^2+1)-(2a+2)\cdot 2a}{(a^2+1)^2}$ [2p]

Top dus $\dfrac{2(a^2+1)-(2a+2)\cdot 2a}{(a^2+1)^2} = 0$ dus $-2a^2-4a+2=0$ dus $a^2+2a-1=0$ [1p]

$(a+1)^2-2=0$ dus $(a+1)^2=2$ dus $a=-1\pm\sqrt{2}$ [1p]

Conclusie: x_P is maximaal als $a=-1+\sqrt{2}$ [1p]
Opmerking: in plaats van kwadraat afsplitsen mag ook de abc-formule gebruikt worden.

tweede methode:
Analyse: de vergelijking van de cirkel is bekend. Daarmee kan de maximale waarde van x_P bepaald worden.
Cirkel $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ heeft middelpunt $M(1,-1)$ en straal $\sqrt{2}$
Dus maximale x_P is $1+\sqrt{2}$ [1p]

Dus moet voor de maximale x_P gelden dat: $\dfrac{2a+2}{a^2+1} = 1+\sqrt{2}$ [1p],
kruislings vermenigvuldigen geeft:
$2a+2=(1+\sqrt{2})(a^2+1)=a^2+a^2\cdot\sqrt{2}+1+\sqrt{2}$ en dus $(1+\sqrt{2})\cdot a^2-2a+\sqrt{2}-1=0$ [1p]
abc-formule:

$$a_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(1+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-1)}}{2\cdot(1+\sqrt{2})} = \frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2})}}{2\cdot(1+\sqrt{2})} = \frac{2\pm\sqrt{4-4)}}{2\cdot(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \text{ [1p]}$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = -1+\sqrt{2}$$

Conclusie: x_P is maximaal als $a=-1+\sqrt{2}$ [1p]

derde methode:
Analyse: de vergelijking van de cirkel is bekend. De maximale waarde van x_P wordt bepaald als $y=-1$.
Cirkel $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ heeft middelpunt $M(1,-1)$ en straal $\sqrt{2}$
Dus maximale x_P als $y=-1$ [1p]

Dus moet gelden dat: $\dfrac{2a-2}{a^2+1}=-1$ [1p], kruislings vermenigvuldigen geeft:

$2a-2=-a^2-1$ en dus $a^2+2a-1=0$ [1p]
abc-formule:

$$a_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-(4\cdot -1)}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2} \text{ [1p]}$$

$x_p = \dfrac{2a+2}{a^2+1}$ is maximaal als $a=-1+\sqrt{2}$ (en minimaal als $a=-1-\sqrt{2}$)

Conclusie: x_P is maximaal als $a=-1+\sqrt{2}$ [1p]

Snelheid op een baan

6p **9** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: in de tekst worden punt B en snelheid genoemd. Bereken eerst punt B en x'en y'.
eerste methode:
Coördinaten van B: $x=0$ dus $\sin(2t)+\sin(t)=0$ [1p]
$2\sin(t)\cos(t)+\sin(t)=0$
$\sin(t)\cdot(2\cos(t)+1)=0$

$\sin(t)=0$ of $\cos(t)=-\frac{1}{2}$ en $0\le t\le\pi$

$t=0$ of $t=\pi$ of $t=\frac{2}{3}\pi$

dus in B geldt $t=\frac{2}{3}\pi$ [1p]

$x(t)=\sin(2t)+\sin(t)$ en dus $x'(t)=2\cos(2t)+\cos(t)$ [1p]

en $x'(\frac{2}{3}\pi)=2\cos(1\frac{1}{3}\pi)+\cos(\frac{2}{3}\pi)=2\cdot-\frac{1}{2}+-\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2}$ [1p]

$y(t)=\cos(t)$ dus $y'(t)=-\sin(t)$ en $y'(\frac{2}{3}\pi)=-\sin(\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ [1p]

Deze waarden invullen in de formule voor de snelheid levert:

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2} = \sqrt{\left(1\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{3}{4}} = \sqrt{3} \text{ [1p]}$$

Conclusie: de snelheid in punt B is $\sqrt{3}$

tweede methode:
Coördinaten van B: $x=0$ dus $\sin(2t)+\sin(t)=0$ [1p]
$\sin(2t)=-\sin(t)=\sin(-t)$ en en $0\le t\le\pi$
$2t=-t+2k\cdot\pi$ of $2t=\pi--t+2k\cdot\pi$
$3t=0+2k\cdot\pi$ $t=\pi+2k\cdot\pi$
$t=0+\frac{2}{3}k\cdot\pi$ $t=\pi$ (punt C)

dus in B geldt $t=\frac{2}{3}\pi$ ($t=0$ is punt A) [1p]

$x(t)=\sin(2t)+\sin(t)$ en dus $x'(t)=2\cos(2t)+\cos(t)$ [1p] en

$x'(\frac{2}{3}\pi)=2\cos(1\frac{1}{3}\pi)+\cos(\frac{2}{3}\pi)=2\cdot-\frac{1}{2}+-\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2}$ [1p]

$y(t)=\cos(t)$ dus $y'(t)=-\sin(t)$ en $y'(\frac{2}{3}\pi)=-\sin(\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ [1p]

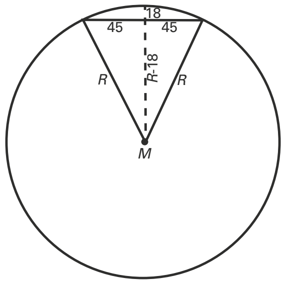
Deze waarden invullen in de formule voor de snelheid levert:

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2} = \sqrt{\left(1\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{3}{4}} = \sqrt{3} \text{ [1p]}$$

Conclusie: de snelheid in punt B is $\sqrt{3}$

Metselboog

5p **10** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische deel van rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: in de schets komt de straal op twee manieren voor. Zij vormen samen met de breedte van de metselboog een rechthoekige driehoek. Denk aan Pythagoras.
$R^2=(R-18)^2+45^2$ [2p]
$R^2=R^2-36R+18^2+45^2$ dus $0=-36R+324+2025$ [2p]
Conclusie: $R=65{,}25$, dus afgerond op een geheel aantal cm is de straal 65 cm. [1p]



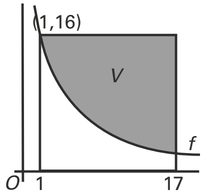
Vierkant bij een grafiek

5p **11** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: inhoud dus denk aan $I = \pi\int_a^b (y^2)\,dx$ *en bepaal de grenzen. Vierkant, dus AB = AD*

eerste methode:

$a = 1$ dus $D(1, 16)$ en lengte zijde $AD = 16$ en lengte $AB = 16$ dus $A(1, 0)$ en $B(17, 0)$ [1p]



Inhoud $= \pi\int_1^{17}\left(16^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}}\right)^2\right)dx = \pi\int_1^{17}\left(256 - \frac{256}{x}\right)dx$ [1p]

Primitieve van $256 - \frac{256}{x}$ is $256x - 256\ln(x)$ [1p] dus

Inhoud$= \pi\,[256x - 256\ln(x)]_1^{17} = \pi\cdot(4096 - (256\ln(17) - 256\ln(1))$ [1p]

Conclusie: inhoud $= \pi\cdot(4096 - 256(\ln 17))$ [1p]

tweede methode:

$a = 1$ dus lengte zijde $AD = 16$ en lengte $AB = 16$ dus $A(1, 0)$ en $B(17, 0)$ [1p]

Inhoud $= \pi\int_1^{17} 16^2\,dx - \pi\int_1^{17}\left(\frac{16}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi\int_1^{17} 256\,dx - \pi\int_1^{17}\left(\frac{256}{x}\right)dx$ [1p]

Primitieve van 256 is $256x$ en de primitieve van $\frac{256}{x}$ is $256\ln(x)$ [1p] dus:

Inhoud$= \pi\,[256x]_1^{17} - \pi\,[256\ln(x)]_1^{17} = \pi\cdot(4096 - (256\ln(17) - 256\ln(1))$ [1p]

Conclusie: inhoud $= \pi\cdot(4096 - 256(\ln 17))$ [1p]

derde methode:

Inhoud cilinder $= \pi r^2\cdot h = \pi\cdot 16^2\cdot 16 = \pi\cdot 256$ [1p] (wenteling lijn $y = 16$ om de x-as van $x = 1$ tot en met $x = 17$)

Inhoud omwentelingslichaam onder $f = \pi\int_1^{17}\left(\frac{16}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi\int_1^{17}\left(\frac{256}{x}\right)dx$ [1p]

Primitieve van $\frac{256}{x}$ is $256\ln(x)$ [1p] dus:

Inhoud omwentelingslichaam onder $f = \pi\,[256\ln(x)]_1^{17} = \pi\cdot(256\ln(17) - 256\ln(1))$ [1p]

Conclusie: inhoud $= \pi\cdot(4096 - 256(\ln 17))$ [1p]

Let op: inhoud is niet te berekenen met $\pi\int_1^{17}\left(16 - \frac{16}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

5p **12** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: ABCD is een vierkant dus AB = AD = f(a)

$D(a, \frac{16}{\sqrt{a}})$ is gegeven

$b = OA + AB = OA + AD = a + f(a) = a + \frac{16}{\sqrt{a}} = a + 16\cdot a^{-\frac{1}{2}}$ [1p]

b is minimaal als $b' = 1 - 8\cdot a^{-\frac{3}{2}} = 0$ [2p]

dus $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ dus $a = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ [1p]

Conclusie: $a = 4$ en $b = 4 + 16\cdot 4^{-\frac{1}{2}} = 4 + 16\cdot\frac{1}{2} = 12$ [1p]

Limietpunt

3p **13** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: inverse, dus x en y verwisselen en herschrijven tot y = … of bewijzen dat $f(f^{inv}(x)) = x$

eerste methode met behulp van verwisselen van x en y:

$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ dus voor inverse geldt $x = \frac{1}{c(y-1)} + 1$ [1p]

Herschrijven tot $y = \ldots$. levert: $\frac{1}{c(y-1)} + 1 = x$ dus $\frac{1}{c(y-1)} = x - 1$ dus

$\frac{1}{x-1} = c(y-1)$ dus $\frac{1}{c(x-1)} = y - 1$ [1p]

Conclusie: de inverse van $f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ is $\frac{1}{c(x-1)} + 1 = y$ [1p]

tweede methode met behulp $f(f^{inv}(x)) = x$:

Er moet dan gelden $f(g(x)) = x$

$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ en inverse noemen we $g_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ dus

$f(g(x)) = \frac{1}{c\left(\frac{1}{c(x-1)} + 1 - 1\right)} + 1$ [1p] $= \frac{1}{\left(\frac{c}{c(x-1)}\right)} + 1$ [1p] $= \frac{1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} + 1 = x - 1 + 1 = x$ [1p]

Conclusie: $f(g(x)) = x$ dus de inverse van $f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ is $\frac{1}{c(x-1)} + 1 = y$

3p **14** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: formule is gegeven. Bepaal $f_c(1+p)$ *en* $f_c(1-p)$

$f_c(1+p) = \frac{1}{c(1+p-1)} + 1 = \frac{1}{c\cdot p} + 1$ [1p] en $f_c(1-p) = \frac{1}{c(1-p-1)} + 1 =$

$\frac{1}{c\cdot -p} + 1 = \frac{1}{-c\cdot p} + 1$ [1p]

Dus $\frac{\left(\frac{1}{c\cdot p} + 1\right) + \left(\frac{1}{-c\cdot p} + 1\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ [1p]

Conclusie: $= \frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = 1$ dus puntsymmetrisch ten opzichte van (1, 1).

5p **15** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: druk x (en y) uit in c.

$y = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ en $y = x$ dus $x = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ [1p]

Herleiden op x levert $x - 1 = \frac{1}{c(x-1)}$ en levert $(x-1)^2 = \frac{1}{c}$ [1p]

En dus $x = -\sqrt{\frac{1}{c}} + 1$ [1p] (want A is linker snijpunt) ($x = \sqrt{\frac{1}{c}} + 1$ vervalt, hoort bij rechter snijpunt)

Als $c \to \infty$ dan $-\sqrt{\frac{1}{c}} \to 0$ dus $x \to 1$ [1p]

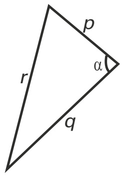
Idem voor y: $y = x = -\sqrt{\frac{1}{c}} + 1$ en als $c \to \infty$ dan $y \to 1$ [1p]

Conclusie: het limietpunt van A is $S(1, 1)$

Vier vierkanten

6p **16** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: gelijke oppervlaktes dus $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 = p^2 + q^2$ *Driehoeken gegeven met alle zijden en één hoek, denk aan gebruik van cosinusregel.*



Voor de lichtgrijs gekleurde vierkanten geldt: oppervlakte = $p^2 + q^2$

Voor de donkergrijze driehoeken geldt: oppervlakte = $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2$

Te bewijzen: $p^2 + q^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2$ [1p]

r en s uitdrukken in p en q.

Volgens de cosinusregel in de witte driehoeken geldt:

$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos(\alpha)$ [1p] (zie tekening) en

$s^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos(\beta)$ [1p]

Omdat $\beta = 360° - 90° - 90° - \alpha = 180° - \alpha$ geldt $s^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos(180° - \alpha)$ [1p]

Omdat $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ geldt verder $s^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos(\alpha)$ [1p]

Dus $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos(\alpha)) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos(\alpha)) = p^2 + q^2$ [1p]

Conclusie: $p^2 + q^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2$ dus de oppervlaktes zijn gelijk.

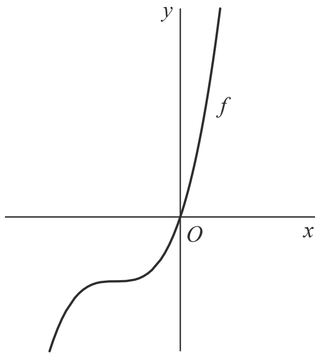
©ThiemeMeulenhoff

Examen 2016-II

De derde macht

De functie f wordt gegeven door $f(x) = (x + 1)^3 - 1$. In de figuur is de grafiek van f weergegeven.

figuur



De functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 1$.

De functie g is de inverse functie van f.

3p **1** Bewijs dat g inderdaad de inverse functie is van f.

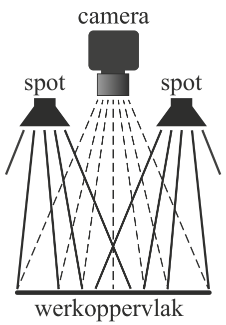
De grafieken van f en g hebben gemeenschappelijke punten.

6p **2** Bereken exact de coördinaten van deze punten.

Spots

Veel industriële en medische processen worden gestuurd door een digitale camera die gekoppeld is aan een computer. Hierbij is een gelijkmatige verlichting van het werkoppervlak van groot belang. Voor de belichting gebruikt men vaak een of meer kleine spots. Zie figuur 1.

figuur 1



Om de belichting goed te kunnen instellen is de hoogte van de spots boven het werkoppervlak variabel.

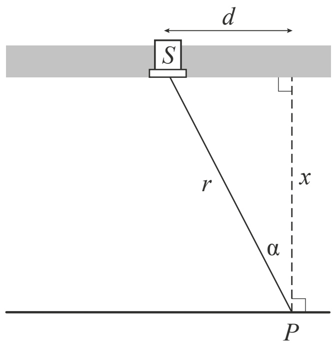
We bekijken eerst de situatie met één spot *S*. Zie figuur 2.

De waargenomen verlichtingssterkte *E* (in lux) in een punt *P* van een horizontaal oppervlak kan berekend worden met de formule:

$$E = \frac{I_{spot}}{4\pi r^2} \cdot \cos(\alpha)$$

Hierin is:
- I_{spot} een constante: de door de spot uitgezonden lichtstroom (in microlumen)
- *r* de afstand (in mm) tot de spot
- α de hoek (in radialen) tussen de lichtstraal en de loodlijn in *P* op het werkoppervlak

figuur 2



In figuur 2 is *d* de horizontale afstand in mm van de spot tot *P* en *x* de verticale afstand in mm van de spot tot *P*. Er geldt:

$$E = \frac{I_{spot}}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

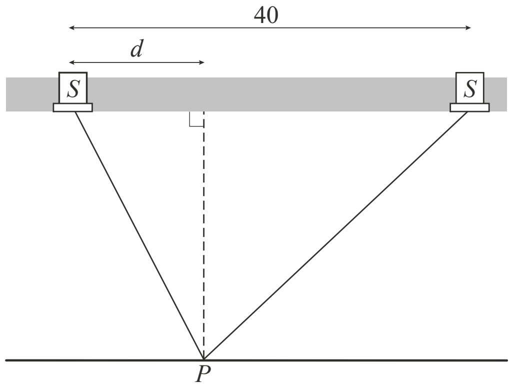
4p **3** Bewijs dit.

We kiezen $d = 10$. Er is een waarde van *x* waarvoor *E* maximaal is.

7p **4** Bereken algebraïsch deze waarde van *x*. Rond je antwoord af op één decimaal.

In de rest van deze opgave bekijken we de situatie met twee identieke spots. Voor elke spot geldt: $I_{spot} = 500$. De spots hebben horizontaal een onderlinge afstand van 40 mm en schijnen recht naar beneden. De verticale afstand van de spots tot het werkoppervlak is 25 mm. Zie figuur 3. Hierin is ook *d* aangegeven, de horizontale afstand in mm van de linker spot tot *P*.

figuur 3



De totale verlichtingssterkte E_{totaal} in een punt op het werkoppervlak is de som van de waargenomen verlichtingssterktes in dat punt van beide spots.

Het deel van het werkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht als de laagste waarde van E_{totaal} in dat deel minstens 80% van de hoogste waarde van E_{totaal} bedraagt.

6p **5** Onderzoek of bij de ingestelde verticale afstand van 25 mm het deel van het werkoppervlak tussen de spots voldoende gelijkmatig belicht wordt.

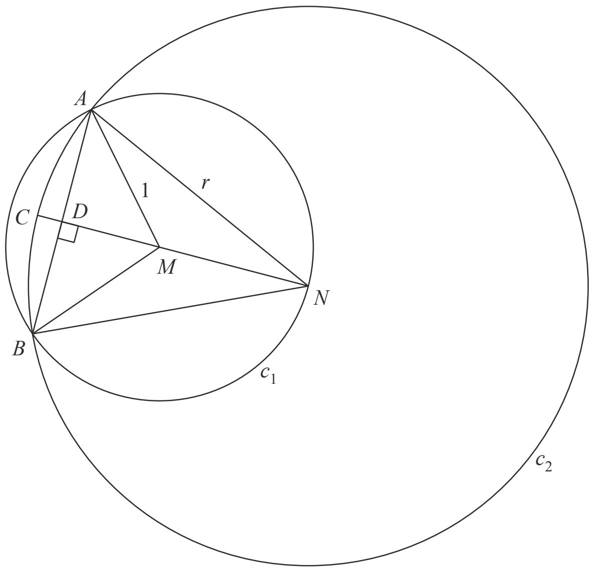
Twee snijdende cirkels

Gegeven is cirkel c_1 met straal 1 en middelpunt *M*. Op de cirkel ligt punt *N*. Punt *N* is het middelpunt van cirkel c_2 met straal *r* waarbij $1 < r < 2$.
De twee cirkels snijden elkaar in de punten *A* en *B*. Zie figuur 1

Lijn *MN* snijdt cirkel c_2 in punt *C* en lijnstuk *AB* in punt *D*. Lijnstuk *AB* staat loodrecht op lijn *MN*.

Er geldt: $DN = \frac{1}{2}r^2$.

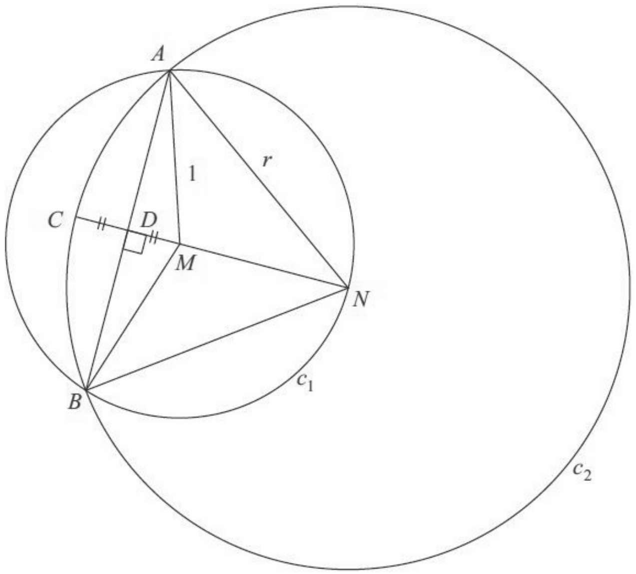
figuur 1



4p **6** Bewijs dat inderdaad geldt $DN = \frac{1}{2}r^2$. Je kunt hierbij gebruikmaken van figuur 1.

Je kunt de waarde van *r* zo kiezen dat *CD* en *DM* even lang zijn. Dan ontstaat de situatie in figuur 2.

figuur 2



4p **7** Bereken exact deze waarde van *r*. Je kunt hierbij gebruikmaken van figuur 2.

Sinusoïde met perforaties

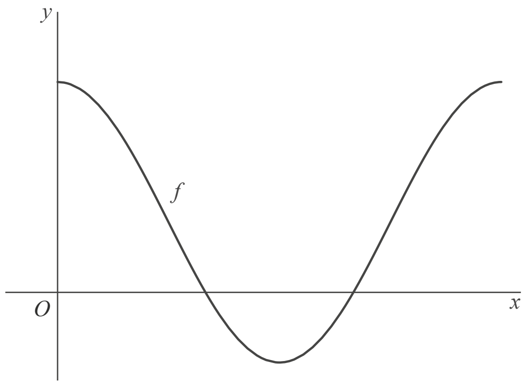
De functie *f* wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$$

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van *f* waarvoor $x \geq 0$ en $x \leq 2\pi$.

De grafiek van *f* is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van *f* weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.

figuur



5p **8** Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van *f*.

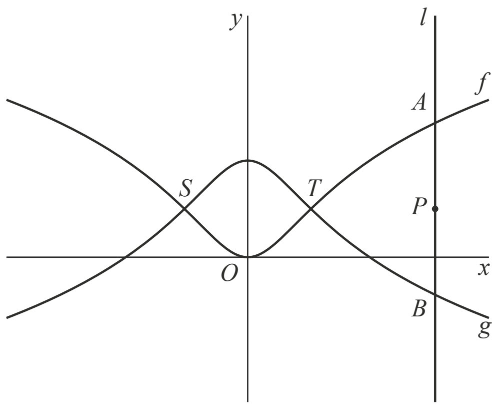
Getransformeerde grafiek

De functies f en g worden gegeven door:

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ en $g(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^2 + 1}\right)$

De grafieken van f en g staan in figuur 1. Ze snijden elkaar in de punten S en T.

figuur 1



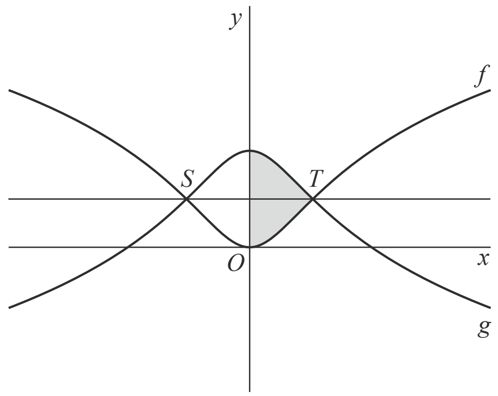
Lijn l met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B. Het punt op lijn l met y-coördinaat 1 noemen we P. In figuur 1 is de situatie weergegeven waarbij l rechts van T ligt.

3p **9** Bewijs dat in deze situatie $AP = BP$.

Ook voor waarden van p waarvoor l niet rechts van T ligt, geldt dat $AP = BP$. Hieruit volgt dat de grafieken van f en g elkaars gespiegelde zijn in de lijn met vergelijking $y = 1$. Deze lijn is getekend in figuur 2.

In figuur 2 is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de y-as, grijsgemaakt.

figuur 2

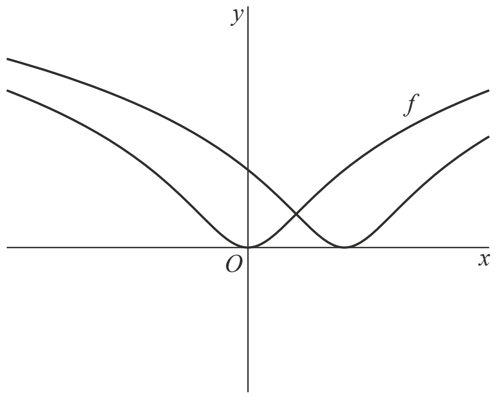


Dit gebied wordt gewenteld om de y-as.

5p **10** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven. In figuur 3 staan de grafiek van f en de verschoven grafiek.

figuur 3



8p **11** Bewijs dat de twee grafieken elkaar loodrecht snijden.

Droogligtijd

In de Waddenzee varieert de waterhoogte in de loop van de tijd. Eb en vloed wisselen elkaar voortdurend af in een getijdencyclus met een periode van ongeveer 745 minuten. De waterhoogte in het oostelijke deel van de Waddenzee kan worden benaderd met de formule:

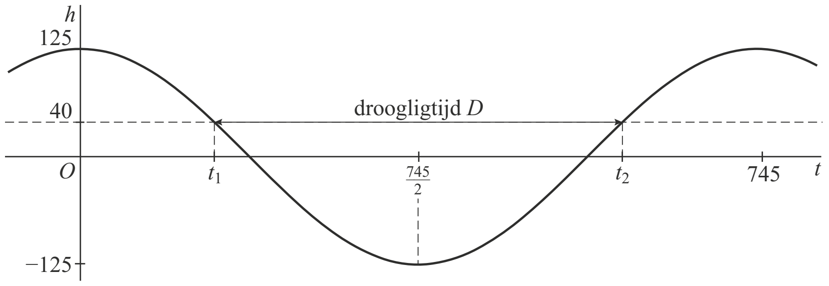
$$h = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right)$$

Hierbij is h de waterhoogte in cm ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil) en is t de tijd in minuten. Tijdstip $t = 0$ komt overeen met een moment waarop $h = 125$.

In het oostelijk deel van de Waddenzee liggen verschillende zandbanken die gedurende een deel van een getijdencyclus droog komen te liggen.
De droogligtijd D is het aantal minuten per getijdencyclus dat een zandbank niet geheel onder water ligt. De droogligtijd hangt af van de hoogte van de zandbank: de hoogte van het hoogste punt van de zandbank ten opzichte van NAP.

In het oostelijk deel van de Waddenzee bevindt zich een zandbank met een hoogte van 40 cm boven NAP.
In figuur 1 is de grafiek van de waterhoogte h getekend. Tevens is de hoogte van deze zandbank weergegeven. Gedurende één periode zijn er twee tijdstippen waarop de waterhoogte h gelijk is aan de hoogte van de zandbank. We noemen deze tijdstippen t_1 en t_2. Het verschil tussen t_2 en t_1 is de droogligtijd D.

figuur 1



4p **12** Bereken de droogligtijd D van deze zandbank. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

Op drooggevallen zandbanken kunnen waddenvogels voedsel vinden.
Daarom willen natuuronderzoekers het verband weten tussen de hoogte van de zandbanken en de tijd dat ze droog liggen.

Met z duiden we de hoogte in cm van de zandbank aan, ten opzichte van NAP.
Er geldt dan:

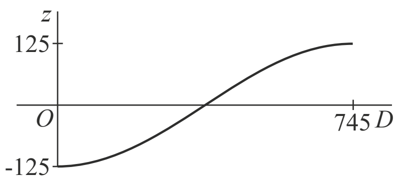
$$z = 125\cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$$

5p **13** Bewijs dit.

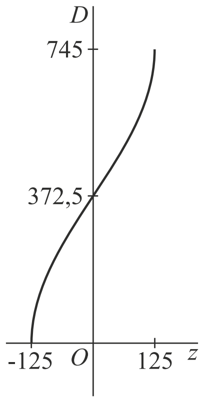
In figuur 2 is de grafiek van z getekend voor waarden van D tussen 0 en 745.

Ook kan een grafiek van het verband tussen D en z worden getekend waarbij z op de horizontale as en D op de verticale as wordt gekozen. Zie figuur 3.

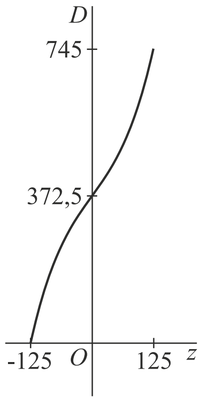
figuur 2



figuur 3



figuur 4



In onderzoeksrapporten wordt, in plaats van de formule die bij figuur 3 hoort, ook wel de volgende derdegraads formule gebruikt:

$$D = 8 \cdot 10^{-5} z^3 + 1{,}7z + 372{,}5$$

De bijbehorende grafiek staat in figuur 4.

De grafieken in figuren 3 en 4 lijken op elkaar. Zo verschillen de hellingen van beide grafieken in het punt (0; 372,5) niet veel.
De helling in een punt op de grafiek van figuur 3 kan worden berekend met behulp van de helling in het overeenkomstige punt in figuur 2: er geldt dat het product van deze twee hellingen gelijk is aan 1.

5p **14** Bereken op algebraïsche wijze bij elk van de figuren 3 en 4 de helling van de grafiek in het punt (0; 372,5). Rond je antwoorden af op één decimaal.

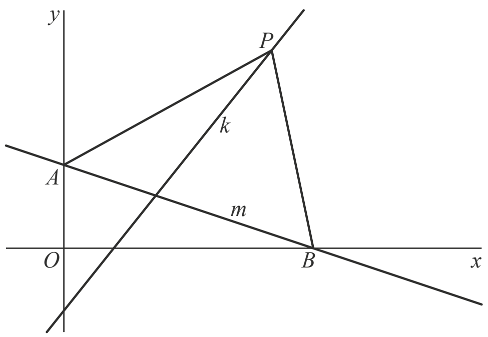
Punt bewegend over een lijn

Lijn k is de lijn met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punt P beweegt over lijn k.
Lijn m gaat door de punten $A(0, 2)$ en $B(6, 0)$. Zie figuur 1.

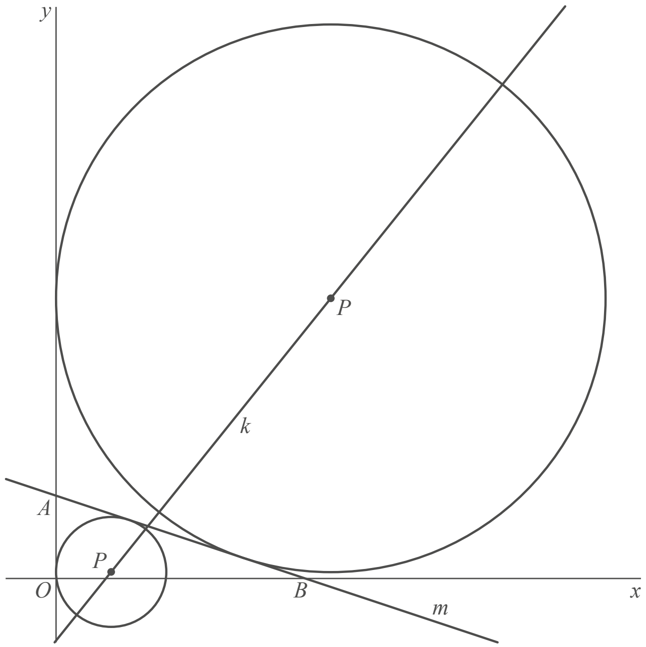
figuur 1



5p **15** Bereken exact de coördinaten van P in de situatie dat $AP = BP$.

Er zijn twee posities van P waarvoor een cirkel met middelpunt P bestaat die zowel raakt aan de y-as als aan lijn m. In figuur 2 zijn deze twee cirkels getekend.

figuur 2



7p **16** Bereken van beide cirkels de straal. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hints bij examen 2016-II

1 Inverse dus bewijs $f(f^{inv}(x)) = x$ of maak gebruik van spiegelen in de lijn $y = x$, dus verwissel de x en y en herschrijf tot $y = \ldots$

2 f en g zijn elkaars inverse functie, dus de snijpunten liggen op de lijn $y = x$.

3 Vervang $\cos(\alpha)$ en r^2. Gebruik de stelling van Pythagoras.

4 Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel bij het differentiëren.

5 Onderzoek, dus gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan. Druk de formules van E_L en E_R uit in d en geef de formule voor E_{totaal}.

6 Zoek naar twee rechthoekige driehoeken en gebruik Pythagoras.

7 Formule voor DN is in de vorige opgave gegeven. $CD = DM$ moet opgelost worden. Herschrijf deze vergelijking tot een vorm met daarin straal r. Ga na waar in de situatie r "verstopt" zit.

8 Perforatie, dus teller en noemer van het quotiënt moeten tegelijkertijd 0 zijn.

9 Als $AP = PB$ dan geldt $y_A - 1 = 1 - y_B$

10 Gegeven is dat het grijze gebied symmetrisch is in de lijn $y = 1$.
De inhoud $= 2 \cdot \pi \int_0^1 x^2 \, dy$.

11 f wordt 2 naar rechts verschoven, bepaal eerst de vergelijking van deze functie. Loodrecht snijden. Dus bepaal het snijpunt en daarna de richtingscoëfficiënt van dit snijpunt met behulp van de afgeleiden.

12 Bereken, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden. Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

13 De hoogte h wordt nu z genoemd. Druk t_1 uit in D.

14 Helling en algebraïsch, dus bereken de afgeleide functies. Bereken de helling in figuur 2. Wat is nu het verband met de helling in figuur 3?

15 Er moet gelden $|AP| = |BP|$, denk aan $AP^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

16 De formule voor afstand van punt $P(x, y)$ tot lijn $ax + by = c$ is $d(P, l) = \dfrac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2016-II

De derde macht

3p **1** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: inverse, dus x en y verwisselen en herschrijven tot y = … of bewijzen dat $f(f^{inv}(x)) = x$.

eerste methode met behulp van verwisselen van x en y:

$f(x) = (x+1)^3 - 1$ dus voor inverse geldt $x = (y+1)^3 - 1$ [1p]

Herschrijven tot $y =$ .... levert: $x = (y+1)^3 - 1$ dus $x + 1 = (y+1)^3$ [1p] dus

$\sqrt[3]{x+1} - 1 = y = g(x)$ [1p]

Conclusie: de inverse van $f(x) = (x+1)^3 - 1$ is $g(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$

tweede methode met behulp $f(f^{inv}(x)) = x$:

Er moet dan gelden $f(g(x)) = x$ (of $g(f(x)) = x$) [1p]

$f(x) = (x+1)^3 - 1$ en $g(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$ dus

$f(g(x)) = (\sqrt[3]{x+1} - 1 + 1)^3 - 1 = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$ [2p]

Conclusie: $f(g(x)) = x$ dus de inverse van $f(x) = (x+1)^3 - 1$ is $g(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$

6p **2** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode:
Analyse: f(x) en g(x) zijn elkaars inverse dus gemeenschappelijke punten liggen op de lijn x = y. Gebruik het resultaat van de opgave hierboven.
Voor de gemeenschappelijke punten moet gelden $(x+1)^3 - 1 = x$ [1p]
Dus $(x+1)^3 = x + 1$ [1p] ($A^3 = A$, dan geldt $A^2 \cdot A = 1 \cdot A$ dus $A^2 = 1 \vee A = 0$)
Dus $x + 1 = 1$ of $x + 1 = -1$ of $x + 1 = 0$ [3p]
Dus $x = 0$ met $y = 0$ of $x = -2$ met $y = -2$ of $x = -1$ met $y = -1$
Conclusie: gemeenschappelijke punten zijn (0, 0), (–1, –1) en (–2, –2) [1p]

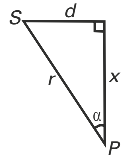
tweede methode:
Analyse: gemeenschappelijke punten dus f(x) = g(x) oplossen.
Voor de gemeenschappelijke punten moet gelden $(x+1)^3 - 1 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ [1p]
Dus $(x+1)^3 = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ [1p] ($A^3 = A^{\frac{1}{3}}$, dan geldt $A^{\frac{8}{3}} = 1$ of $A = 0$)
dus $(x+1)^{\frac{8}{3}} = 1$ of $x + 1 = 0$ [1p] dus

$(x+1)^8 = 1^3 = 1$ of $x + 1 = 0$
dus $x + 1 = 1$ of $x + 1 = -1$ of $x + 1 = 0$ [2p]
$x + 1 = 1$ dus $x = 0$ met $y = 0$ of
$x + 1 = -1$ dus $x = -2$ met $y = -2$ of
$x + 1 = 0$ dus $x = -1$ met $y = -1$
Conclusie: gemeenschappelijke punten zijn (0, 0), (–1, –1) en (–2, –2) [1p]

derde methode:
Analyse: gemeenschappelijke punten dus f(x) = g(x) oplossen.
Voor de gemeenschappelijke punten moet gelden $(x+1)^3 - 1 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ [1p]
Dus $(x+1)^3 = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ dus $(x+1)^9 = x + 1$ [1p]
$(x+1)^9 - (x+1) = 0$ dus $(x+1)((x+1)^8 - 1) = 0$ [1p]
Dus $x + 1 = 0$ of $(x+1)^8 = 1$
Dus $x = -1$ of $x + 1 = 1$ of $x + 1 = -1$ [2p]
Dus $x = -1$ of $x = 0$ of $x = -2$
Dus $x = -1$ met $y = -1$ of $x = 0$ met $y = 0$ of $x = -2$ met $y = -2$
Conclusie: gemeenschappelijke punten zijn (0, 0), (–1, –1) en (–2, –2) [1p]

Spots

4p **3** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: vergelijk de twee voor E gegeven formules, let op verschillen en overeenkomsten. Vervang cos(α) en r^2. Er is een rechthoekige driehoek gegeven, dus denk aan Pythagoras.



$\cos(\alpha) = \dfrac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}} = \dfrac{x}{r}$ [1p] en $r^2 = x^2 + d^2$ [1p]

Dus $E = \dfrac{I_{spot}}{4\pi r^2} \cdot \cos\alpha = \dfrac{I_{spot}}{4\pi \cdot (x^2+d^2)} \cdot \dfrac{x}{r} = \dfrac{I_{spot}}{4\pi \cdot (x^2+d^2)} \cdot \dfrac{x}{(x^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}$ [1p]

Conclusie: $E = \dfrac{I_{spot}}{4\pi} \cdot \dfrac{x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ [1p]

7p **4** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische deel van rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maximaal, dus afgeleide gelijkstellen aan nul. Bepaal E′.
Opmerking: er is een formule voor E gegeven. Deze formule kan in deze opgave gebruikt worden. I_{spot} is een constante.

Gegeven $d = 10$ dus $E = \dfrac{I_{spot}}{4\pi} \cdot \dfrac{x}{(x^2+100)^{\frac{3}{2}}}$ (gebruik quotiëntregel en kettingregel)

$E' = \dfrac{I_{spot}}{4\pi} \cdot \left(\dfrac{1 \cdot (x^2+100)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2+100)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+100)^3}\right) = \dfrac{I_{spot}}{4\pi} \cdot \left(\dfrac{(x^2+100)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot (x^2+100)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+100)^3}\right)$ [2p]

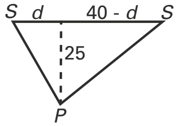
Maximaal dus $E' = 0$ dus $(x^2+100)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot (x^2+100)^{\frac{1}{2}} = 0$ [1p]

$(x^2+100)^{\frac{1}{2}} \cdot ((x^2+100) - 3x^2) = 0$ [1p] ($(x^2+100)^{\frac{1}{2}} \neq 0$, want $x^2 + 100 > 0$) dus

$x^2 + 100 - 3x^2 = 0$ [1p] dus $x^2 = 50$ en $x = \sqrt{50}$ [1p] (want $x > 0$)

Conclusie: $x = 7{,}1$ [1p]
Let op het gevraagde aantal decimalen.

6p **5** *Onderzoek, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: maak formules van de linker spot E_L, de rechter spot E_R en de optelling van deze twee E_{Totaal}. Verwerk de gegevens I_{spot} = 500, d, d – 40 en x = 25 in deze formules. Verder worden de hoogste en laagste waarden van E genoemd. Bepaal deze hoogste en laagste waarden.

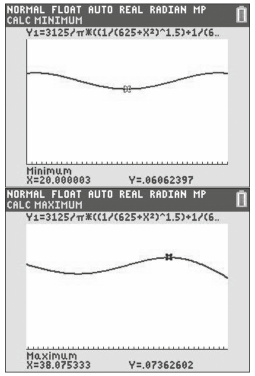


$E_L = \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ en $E_R = \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2+(40-d)^2)^{\frac{3}{2}}}$ dus

$E_{Totaal} = E_L + E_R = \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2+(40-d)^2)^{\frac{3}{2}}}$ [2p]

$y_1 = \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{500}{4\pi} \cdot \dfrac{25}{(25^2+(40-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ of vereenvoudig tot

$y_1 = \dfrac{3125}{\pi} \cdot \left(\dfrac{1}{(625+x^2)^{1{,}5}} + \dfrac{25}{(625+(40-x)^2)^{1{,}5}}\right)$

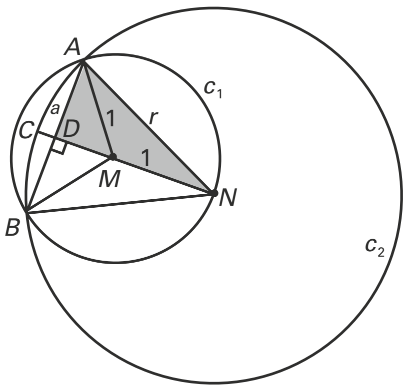


WINDOW bijvoorbeeld [0, 40] × [0; 0,1]
Minimum waarde van E berekenen met Calc max levert
$E_{Totaal} = 0{,}061$ [1p]
Maximum waarde van E levert $E_{Totaal} = 0{,}074$ [1p]
0,061 is 82% van 0,074 [1p]
Conclusie: het oppervlak wordt voldoende gelijkmatig verlicht. [1p]
Let op: E_{Totaal} is niet gelijk aan 2E.

Buiten en binnen de cirkel

4p **6** *eerste methode:*
Analyse: er is een cirkel gegeven met daarin twee rechthoekige driehoeken, ΔADN en ΔADM, denk dus aan Pythagoras. $MN = 1$, dus $DM = DN - 1$ en noem $AD = a$.
Opmerking: maak met behulp van de twee driehoeken twee uitdrukkingen waar (de vraag) DN in verwerkt is.
Voor ΔADN geldt $a^2 + DN^2 = r^2$ [1p]
Voor ΔADM geldt $a^2 + DM^2 = 1^2$ en $DM = DN - 1$, dus $a^2 + (DN - 1)^2 = 1$ [1p] dus
$a^2 + DN^2 - 2 \cdot DN + 1 = 1$
Er zijn dus twee vergelijkingen: $a^2 + DN^2 = r^2$ en $a^2 + DN^2 - 2 \cdot DN = 0$ dus
$a^2 = r^2 - DN^2$ en $a^2 = -DN^2 + 2 \cdot DN$ combineren geeft $r^2 - DN^2 = -DN^2 + 2 \cdot DN$ [1p]
dit levert: $r^2 = 2 \cdot DN$

Conclusie: $DN = \frac{1}{2}r^2$ [1p]



tweede methode:
Analyse: er is een cirkel gegeven met daarin twee rechthoekige driehoeken, ΔADN en ΔADM, denk dus aan Pythagoras. $MN = 1$, dus $DN = DM + 1$ en noem $AD = a$.
Opmerking: maak met behulp van de twee driehoeken twee uitdrukkingen waar (de vraag) DN in verwerkt is.
Voor ΔADN geldt $a^2 + DN^2 = r^2$ en en $DN = DM + 1$, dus $a^2 + (DM + 1)^2 = r^2$
dus $a^2 + DM^2 + 2 \cdot DM + 1 = r^2$ [1p]
Voor ΔADM geldt $a^2 + DM^2 = 1^2$ [1p]
Er zijn dus twee vergelijkingen: $a^2 + DM^2 + 2 \cdot DM + 1 = r^2$ en $a^2 + DM^2 = 1$ dus
$a^2 = -DM^2 - 2 \cdot DM - 1 + r^2$ en $a^2 = -DM^2 + 1$
combineren geeft $-DM^2 - 2 \cdot DM - 1 + r^2 = -DM^2 + 1$ [1p]

dus: $1 + 2 \cdot DM + 1 = r^2$ dus $DM = \frac{1}{2}r^2 - 1$

Omdat $DN = DM + 1$ geldt $DN = DM + 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1 + 1$

Conclusie: $DN = \frac{1}{2}r^2$ [1p]

4p **7** *Opmerking: een formule voor DN is in de opgave hiervoor gegeven. Dit gegeven kan in deze opgave gebruikt worden.*
Analyse: de vergelijking $CD = DM$ moet opgelost worden. Herschrijf deze vergelijking tot een vorm met daarin straal r. Ga na waar in de situatie r “verstopt” zit.
CD herschrijven:

$AN = CN = r$ (straal cirkel c_2) en $DN = \frac{1}{2}r^2$ (vorige opgave) dus
$CD = CN - DN = r - \frac{1}{2}r^2$ [1p]

DM herschrijven:

$DM = DN - MN$ en $DN = \frac{1}{2}r^2$ (vorige opgave) en

$MN = 1$ (straal cirkel c_1) dus $DM = \frac{1}{2}r^2 - 1$ [1p]

$CD = DM$, dus moet gelden: $r - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2 - 1$ [1p] dus

$r^2 - r - 1 = 0$

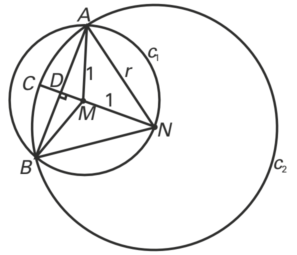
Dus $\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ dus $r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

(of gebruik de abc-formule)

Conclusie: gevraagde waarde is $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

(of $r = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$)

Opmerking: vergelijking $r^2 - r - 1 = 0$ mag ook met de abc-formule worden opgelost.



Sinusoïde met perforaties

5p **8** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: perforatie, dus teller en noemer van het quotiënt moeten tegelijkertijd 0 zijn.
Opmerking: houd rekening met het herschrijven van cos(2x)

Perforatie dus $1 + \cos(2x) = 0$	en $\cos(x) = 0$ dus [1p]
$\cos(2x) = -1$	en $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$
$2x = \pi + 2k\pi$	
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$	

Dus perforatie als $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ [1p]

Omdat $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ geldt $f(x) = \dfrac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} + 1 = 2\cos(x) + 1$ [1p]

(met $x \neq \frac{1}{2}\pi$ of $x \neq 1\frac{1}{2}\pi$)

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (2\cos(x) + 1) = 1$ en $\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}\pi} f(x) = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}\pi} (2\cos(x) + 1) = 1$ [1p]

Conclusie: perforaties bij $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$ [1p]

Opmerking: invullen van $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ in f(x) levert $y = \frac{0}{0} + 1$ op, is dus niet toegestaan.

Getransformeerde grafiek

3p **9** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: P(p, 1), als $AP = PB$ dan $y_A - 1 = 1 - y_B$. Genoemd worden de punten A en B, bepaal hun coördinaten. Let op rekenregels met logaritmen.
eerste methode bewijs $y_A - 1 = 1 - y_B$:
$P(p, 1)$ en $y_A = f(p) = \ln(p^2 + 1)$ en $y_B = g(p) = \ln\left(\dfrac{e^2}{p^2 + 1}\right)$

Omdat $AP = PB$ moet gelden $y_A - 1 = 1 - y_B$ *Controleer dit.*

$y_A - 1 = \ln(p^2 + 1) - 1$ en $1 - y_B = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)$

Er moet dus gelden $\ln(p^2 + 1) - 1 = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)$ dus $\ln(p^2+1) + \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right) = 2$ [1p]

Omdat $\ln\left((p^2+1)\cdot\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)\right) = \ln(e^2) = 2$ [1p] geldt dus $y_A - 1 = 1 - y_B$ [1p]

Conclusie: $AP = PB$

tweede methode bewijs $BP = AP$:

$P(p, 1)$ en $y_A = f(p) = \ln(p^2+1)$ en $y_B = g(p) = \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)$

Omdat $AP = PB$ moet gelden $y_A - 1 = 1 - y_B$ *Controleer dit.*

$PB = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right) = 1 - (\ln(e^2) - \ln(p^2+1)) = 1 - (2 - \ln(p^2+1)) = -1 + \ln(p^2+1) =$

$\ln(p^2+1) - 1 = AP$ [2p]
Dus $y_A - 1 = 1 - y_B$ [1p]
Conclusie: $AP = PB$

derde methode met P is het midden van A en B:

$P(p, 1)$ en $y_A = f(p) = \ln(p^2+1)$ en $y_B = g(p) = \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)$

De y-coördinaat van het midden van de punten A en B moet 1 zijn, dus moet gelden

$\frac{f(p) + g(p)}{2} = 1$ *Controleer dit.*

Dus moet gelden $\frac{\ln(p^2+1) + \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)}{2} = 1$ [1p]

Omdat $\frac{\ln(p^2+1) + \ln\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)}{2} = \frac{\ln\left((p^2+1)\cdot\left(\frac{e^2}{p^2+1}\right)\right)}{2} = \frac{\ln(e^2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ [2p] geldt

dus $\frac{f(p) + g(p)}{2} = 1$

Dus de y-coördinaat van het midden van de punten A en B is 1
Conclusie: $AP = PB$

5p **10** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: f en g zijn elkaars gespiegelde in de lijn y = 1. Wentelen om de y-as dus gebruik

inhoud $= 2 \cdot \pi \int_0^1 x^2\,dy$

$f(x) = \ln(x^2+1)$ dus $y = \ln(x^2+1)$ dus $e^y - 1 = x^2$ [1p]

Inhoud onderste helft $= \pi\int_0^1 x^2\,dy$ [1p] $= \pi\int_0^1 (e^y - 1)\,dy = \pi\left[e^y - y\right]_0^1 = \pi((e - 1) - 1)$

$= \pi(e - 2)$ [2p]

Conclusie: $\text{Inhoud}_{totaal} = 2\pi \cdot (e - 2)$ [1p]

8p **11** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: twee naar rechts verschoven, dus stel f_2 op.
Snijden, dus los op $f = f_2$ (levert op $x = a$). Richtingscoëfficiënt dus $f'(a)$ en $f_2'(a)$ bepalen.
Loodrecht, dus product moet –1 zijn.

$f(x) = \ln(x^2+1)$ en $f_2(x) = \ln((x-2)^2+1)$ [1p]

Snijden dus $\ln(x^2+1) = \ln((x-2)^2+1)$ dus $x^2 + 1 = (x-2)^2 + 1$ [1p] dus

$x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$ dus $1 = -4x + 5$ dus snijden bij $x = 1$ [1p]

Richtingscoëfficiënt dus $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ [1p] en $f_2'(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+1}$ [1p] *(kettingregel)*

Richtingscoëfficiënt als $x = 1$ is dus $f'(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$ [1p] en

$f_2'(1) = \frac{2(1-2)}{(1-2)^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$ [1p]

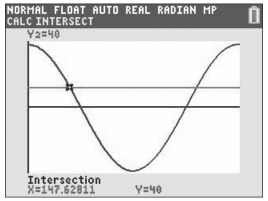
Conclusie: het product van de twee richtingscoëfficiënten is –1 [1p], dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

Droogligtijd

4p **12** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: in de tekst worden punt t_1 en t_2 genoemd. Deze worden als eerste berekend.

Los op: $125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right) = 40$ [1p]

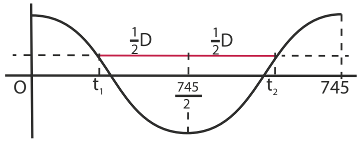
$y_1 = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}x\right)$ en $y_2 = 40$ [1p]



Kies WINDOW bijvoorbeeld [0, 750] × [–130,130]
Calculate intersect levert: $t_1 \approx 147{,}6$ en $t_2 \approx 597{,}4$ [1p]
De tijd dat de zandbank niet onder water ligt is
597,4 – 147,6 = 449,8 minuten
Conclusie: de droogtijd D is ongeveer 450 minuten. [1p]
Let op de afronding op hele minuten.

5p **13** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: de hoogte h wordt nu z genoemd. Op tijdstip t_1 valt de zandbank droog, dus
$z = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$.
Druk t in D uit.

Op $t = t_1$ start de droogligtijd D, dus $t_1 = \frac{745}{2} - \frac{1}{2}D$ [2p]



De hoogte z hangt af van t_1 dus $z = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$ [1p]

$t_1 = \frac{745}{2} - \frac{1}{2}D$ invullen geeft

$z = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right) = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}\left(\frac{745}{2} - \frac{1}{2}D\right)\right)$ [1p]

Conclusie: $z = 125\cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$ [1p]

Opmerking: de periode is 2 · 745 en de amplitude is 125, dus bij een hoogte van 125 cm ligt de zandbank 745 minuten droog. En bij een hoogte van –125 cm ligt de zandbank 0 minuten droog.

5p **14** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische deel van de rekenmachine is niet toegestaan.*
Opmerking: er is een formule voor z gegeven. Deze formule kan in deze opgave gebruikt worden.
Analyse: hellingen dus differentiëren. De derdegraads formule is differentieerbaar.

De gegeven formule voor z = $125\cos(\pi - \frac{\pi}{745}D)$ *is ook differentieerbaar.*

Er is een verband tussen de helling van z en de helling van D.
In figuur 4 geldt: $D = 8 \cdot 10^{-5} \cdot z^3 + 1{,}7z + 372{,}5$ dus $D' = 24 \cdot 10^{-5} \cdot z^2 + 1{,}7$ [1p] en als $z = 0$ geldt de gevraagde helling is $D' \approx 1{,}7$ [1p]

In figuur 2 geldt: $z = 125\cos(\pi - \frac{\pi}{745}D)$ dus $z' = -125 \cdot -\frac{\pi}{745}\sin(\pi - \frac{\pi}{745}D)$ [1p] en als

$D = 372{,}5$ geldt de helling is $z' = -125 \cdot -\frac{\pi}{745} \cdot 1 = \frac{125\pi}{745} \approx 0{,}527$ [1p] in punt (372,5; 0)

Dus de gevraagde helling in figuur 3 in (0; 372,5) is dan $D' = \frac{745}{125\pi} \approx \frac{1}{0{,}527} \approx 1{,}897$ [1p]

Conclusie: de gevraagde hellingen zijn 1,7 en 1,9
Let op het gevraagde aantal decimalen.

Punt bewegend over een lijn

5p **15** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met behulp van Pythagoras:
Analyse: P ligt op de getekende lijn en er moet gelden |AP| = |BP|. Afstanden, dus denk aan Pythagoras.
$A(0, 2)$, $B(6, 0)$ en $P(2 + 4t, 1 + 5t)$ [1p]
Pythagoras
$AP^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (2 + 4t - 0)^2 + (1 + 5t - 2)^2 = (2 + 4t)^2 + (5t - 1)^2$ [1p] en
$BP^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (2 + 4t - 6)^2 + (1 + 5t - 0)^2 = (4t - 4)^2 + (1 + 5t)^2$ [1p]
$|AP| = |BP|$ dus $(2 + 4t)^2 + (5t - 1)^2 = (4t - 4)^2 + (1 + 5t)^2$
dus $4 + 16t + 16t^2 + 25t^2 - 10t + 25 = 16t^2 - 32t + 16 + 1 + 10t + 25t^2$
dus $28t = 12$ dus $t = \frac{3}{7}$ [1p]
Conclusie: invullen levert $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$ [1p]

tweede methode met behulp van de middelloodlijn en vectorvoorstelling:
Analyse: P ligt op de getekende lijn en P ligt op de middelloodlijn van AB.

$A(0, 2)$, $B(6, 0)$ en dus vectorvoorstelling van AB : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ en midden van A en B is (3, 1) [1p]

Dus vectorvoorstelling van middelloodlijn van AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ [1p]

Lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lijn k en middelloodlijn snijden, dan moet gelden $3 + r = 2 + 4t$ en $1 + 3r = 1 + 5t$ [1p]
$r = -1 + 4t$ invullen in $1 + 3r = 1 + 5t$ geeft

Dus $1 + 3(-1 + 4t) = 1 + 5t$ dus $t = \frac{3}{7}$ [1p]

Conclusie: invullen levert $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$ [1p]

derde methode met behulp van middelloodlijn en vergelijkingen:
Analyse: P ligt op de getekende lijn en P ligt op de middelloodlijn van AB.

$A(0, 2)$, $B(6, 0)$ en dus vergelijking van AB : $y = -\frac{1}{3}x + 2$ en midden van A en B is (3, 1) [1p]

Vergelijking van middelloodlijn van AB : $y = 3x - 8$ [1p]

k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dus richtingscoëfficiënt is $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$, k door (2, 1) dus

vergelijking van lijn k : $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ [1p]

Lijn k en middelloodlijn snijden, dan moet gelden $3x - 8 = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$

Dus $\frac{7}{4}x = \frac{13}{2}$ dus $7x = 26$ dus $x = 3\frac{5}{7}$ [1p]

Conclusie: invullen levert $P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$ [1p]

7p **16** *Rond af op twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: afstand dus denk aan afstand van punt tot lijn ax + by = c is $d(P,l) = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Lijn m gaat door $A(0, 2)$, $B(6, 0)$ heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{3}x + 2$ [1p] herschrijven tot

m: $x + 3y - 6 = 0$,

P ligt op de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dus $x = 2 + 4t$ en $y = 1 + 5t$ [1p]

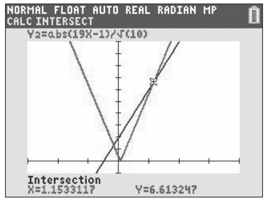
Voor de afstand d(P, m) geldt

$d(P, m) = \frac{|x_P + 3y_P - 6|}{\sqrt{12 + 32}} = \frac{|(2 + 4t) + 3(1 + 5t) - 6|}{\sqrt{12 + 32}} = \frac{|19t - 1|}{\sqrt{10}}$ [1p]

De afstand van P tot de y-as is d(P, y-as) = $2 + 4t$

Er moet gelden d(P, y-as) = d(P, m) dus $2 + 4t = \frac{|19t - 1|}{\sqrt{10}}$ [1p]

Oplossen met grafische rekenmachine



$y_1 = 2 + 4x$ en $y_2 = \frac{|19t - 1|}{\sqrt{10}}$ [1p]

Kies WINDOW bijvoorbeeld [–3, 4] × [–1,10] geeft
$t \approx -0{,}17$ of $t \approx 1{,}15$ [1p]
Invullen in d(P, y-as) = $2 + 4t$ (is straal cirkel) levert
straal is ongeveer 1,33 en straal is ongeveer 6,61
Conclusie: straal is ongeveer 1,33 en straal is ongeveer 6,61 [1p]
Let op het gevraagde aantal decimalen.

Examen 2017-I

Rakende grafieken?

De functies f en g zijn gegeven door:

$f(x) = \ln(x)$ en

$g(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2$

5p **1** Ga na met exacte berekening of de grafieken van f en g elkaar raken.

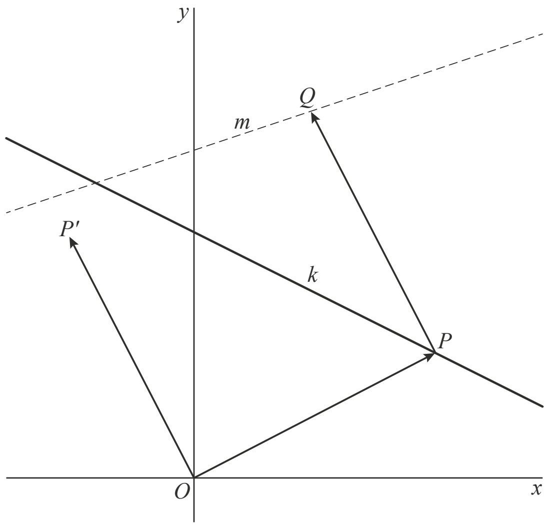
Bewegen over een lijn

Gegeven is lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Op deze lijn ligt het punt P.

Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong over 90° linksom gedraaid. Zo ontstaat vector $\overrightarrow{OP'}$.

Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP'}$.
Zie de figuur.

figuur



Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn m bewegen. In de figuur is m gestippeld weergegeven.

4p **2** Stel een vergelijking van lijn m op.

Een derde cirkel

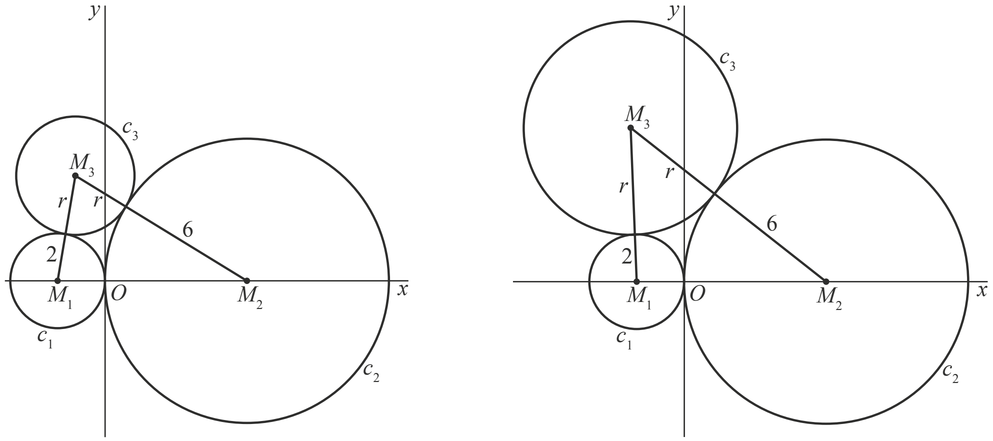
Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2. Cirkel c_1 heeft middelpunt $M_1(-2, 0)$ en straal 2.
Cirkel c_2 heeft middelpunt $M_2(6, 0)$ en straal 6.

Voor elke positieve waarde van r is er één cirkel c_3 met middelpunt M_3 en straal r zó dat geldt:
- M_3 ligt boven de x-as;
- c_3 raakt aan cirkel c_1 én aan cirkel c_2.

In figuur 1 is de situatie getekend voor $r = 2\frac{1}{2}$ en in figuur 2 voor $r = 4\frac{1}{2}$.

Verder is in beide figuren driehoek $M_1M_2M_3$ getekend.

figuur 1 $r = 2\frac{1}{2}$ figuur 2 $r = 4\frac{1}{2}$



De grootte van $\angle M_1M_2M_3$ is afhankelijk van r. Voor elke waarde van r geldt:

$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$

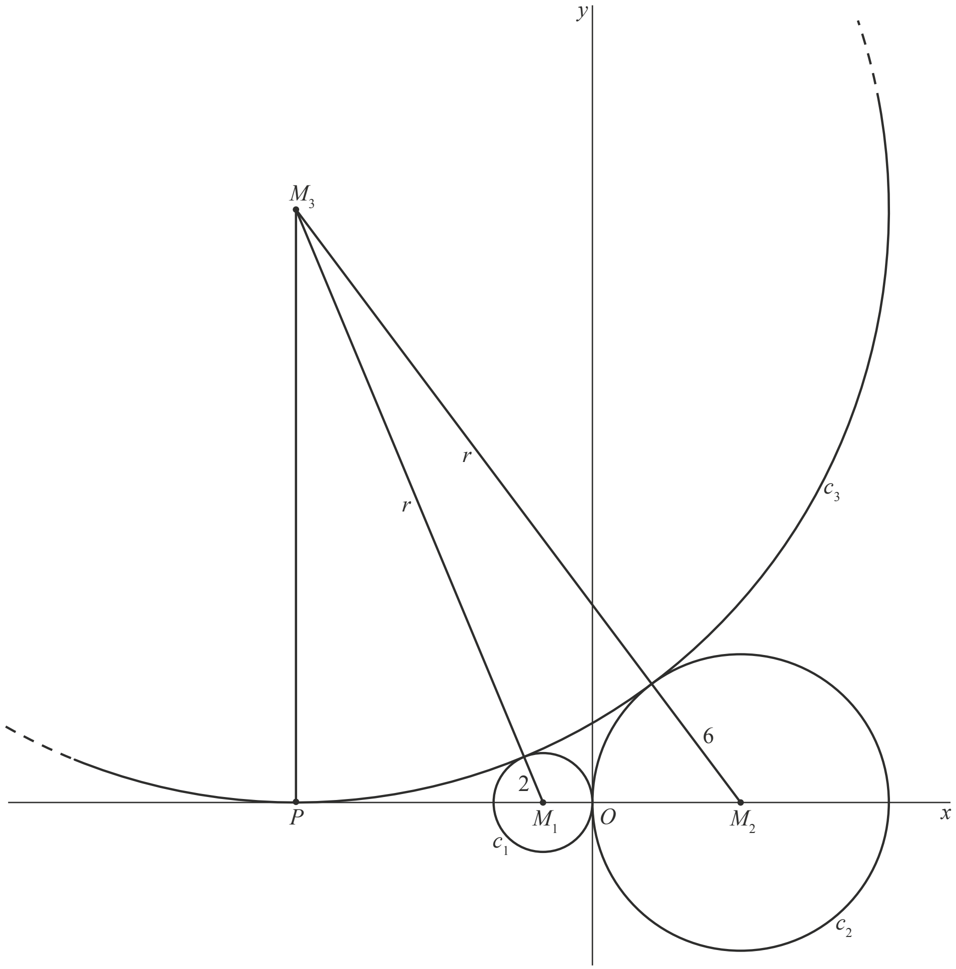
4p **3** Bewijs de juistheid van deze formule.

Als r onbegrensd toeneemt, nadert de grootte van $\angle M_1M_2M_3$ tot een limiet.

3p **4** Bereken exact deze limiet in graden.

Er is één waarde van r waarvoor c_3 niet alleen raakt aan c_1 en c_2, maar ook aan de x-as. In figuur 3 is deze situatie weergegeven, waarbij cirkel c_3 voor een deel is getekend.
Cirkel c_3 raakt de x-as in punt P.

figuur 3



6p **5** Bereken exact de waarde van r in deze situatie.

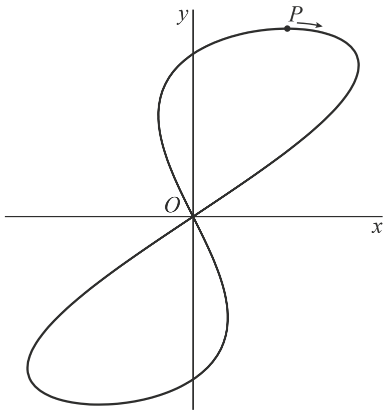
Een achtbaan

De baan van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

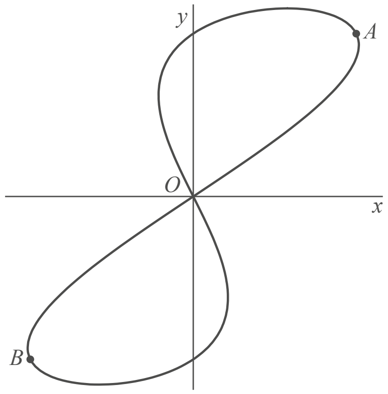
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(t) \end{cases}$$ met t in seconden en x en y in meter.

Als t loopt van 0 tot 2π, doorloopt P de baan precies één keer.
In figuur 1 is deze baan weergegeven. Ook is te zien waar P zich bevindt op $t = 0$ en in welke richting P zich dan beweegt.

figuur 1



figuur 2



5p **6** Bereken met behulp van differentiëren de maximale snelheid van het punt P in meter per seconde. Rond je antwoord af op één decimaal.

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ zijn er vier tijdstippen waarop de x-coördinaat en de y-coördinaat van P aan elkaar gelijk zijn. Op deze tijdstippen bevindt P zich achtereenvolgens in de punten A, O, B en O. Zie figuur 2.

5p **7** Bereken exact hoeveel seconden de beweging van A naar B duurt.

Een punt Q maakt dezelfde beweging als P, maar Q loopt π seconden vóór op P.

De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dan:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t+\pi) + \sin(2(t+\pi)) \\ y(t) = 2\cos(t+\pi) \end{cases}$$

Als $t = \frac{1}{2}\pi$ en als $t = \frac{3}{2}\pi$, vallen P en Q samen. Op alle andere tijdstippen is er sprake van een lijnstuk PQ.

4p **8** Bewijs dat de helling van lijnstuk PQ onafhankelijk van t is.

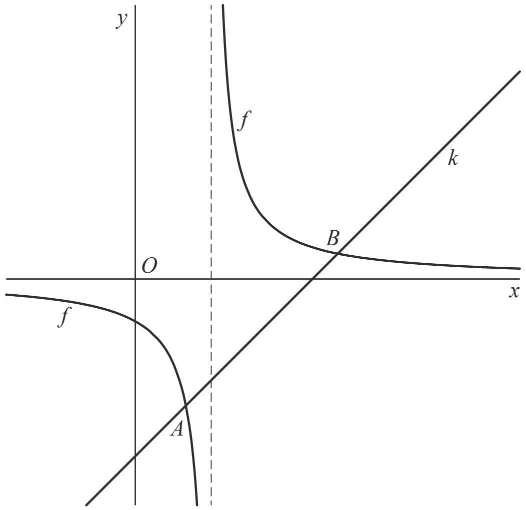
Een gebroken functie

De functie f is gegeven door:

$f(x) = \dfrac{5}{4x - 6}$

De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten, A en B.
Zie figuur 1.
De coördinaten van punt A zijn $(1, -2\frac{1}{2})$.

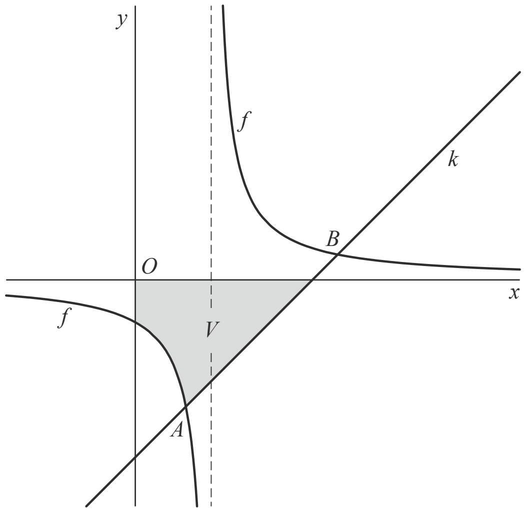
figuur 1



4p **9** Bereken exact de coördinaten van punt B.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn k. In figuur 2 is dit vlakdeel grijs gemaakt.
V wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

figuur 2



5p **10** Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.

De grafiek van f wordt a eenheden naar boven of naar beneden verschoven. Zo ontstaat de grafiek van een functie g. De waarde van a kan dus zowel positief als negatief zijn.
De functie g heeft een inverse functie. De grafiek van de inverse functie van g heeft één verticale asymptoot. Ook de grafiek van g heeft een verticale asymptoot.
Gegeven is, dat de afstand tussen deze twee verticale asymptoten gelijk is aan 4.

4p **11** Bereken exact de mogelijke waarden van a.

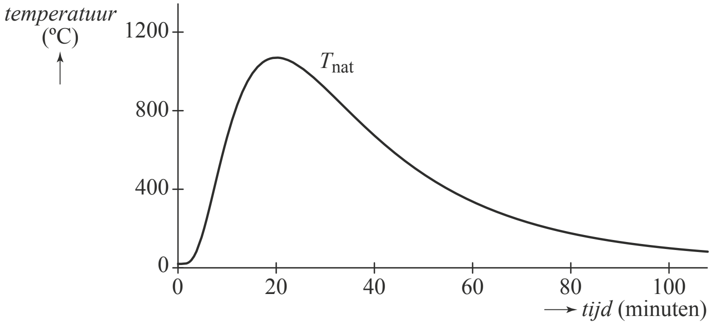
Brandwerendheid van een deur

De (lucht)temperatuur tijdens een bepaald soort natuurlijke brand kan worden beschreven met het volgende model:

$T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9}$

Hierin is T_{nat} de temperatuur in °C en t de tijd in minuten vanaf het begin van de brand. De bijbehorende grafiek is weergegeven in figuur 1.

figuur 1 natuurlijke brand



In de figuur is te zien dat de temperatuur bij deze natuurlijke brand een maximum bereikt.

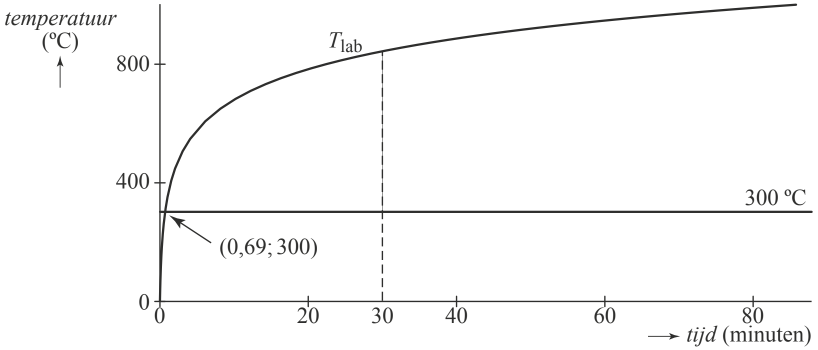
5p **12** Bereken exact deze maximale temperatuur.

Deuren worden getest op hun brandwerendheid door ze in een laboratorium aan een brand bloot te stellen.
De temperatuur tijdens zo'n **laboratoriumbrand** verloopt anders dan bij de natuurlijke brand, namelijk volgens de formule:

$T_{lab}(t) = 20 + 345 \cdot \log(8t + 1)$

Hierin is T_{lab} de temperatuur in °C en t de tijd in minuten vanaf het begin van de brand. De bijbehorende grafiek is weergegeven in figuur 2.

figuur 2 laboratoriumbrand



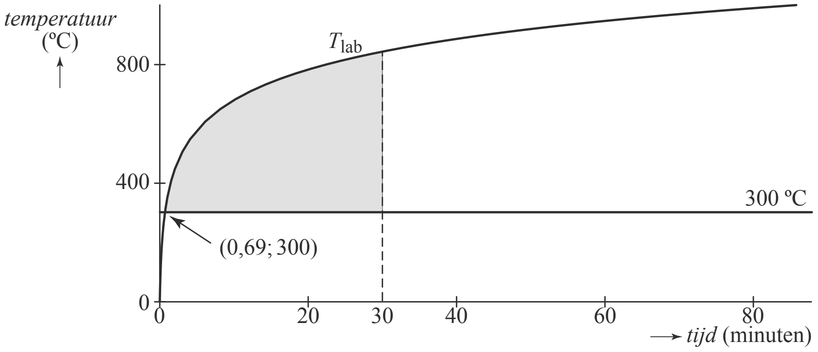
Temperaturen onder de 300 °C leveren geen blijvende schade aan de deur op. Pas vanaf een temperatuur van 300 °C heeft een deur onder de brand te lijden. Het tijdstip t waarop deze temperatuur bij de laboratoriumbrand wordt bereikt, is afgerond op twee decimalen 0,69. Zie figuur 2.

4p **13** Bereken algebraïsch het tijdstip t waarop de temperatuur bij de laboratoriumbrand de waarde 300 °C bereikt. Rond je antwoord af op drie decimalen.

In de rest van deze opgave bekijken we een deur die wordt blootgesteld aan een laboratoriumbrand. Deze deur blijkt precies 30 minuten stand te houden. Men vraagt zich af hoe berekend kan worden of zo'n deur tijdens de natuurlijke brand óók 30 minuten standhoudt.

In figuur 3 is het vlakdeel grijs gemaakt dat wordt ingesloten door de grafiek van T_{lab}, de horizontale lijn met vergelijking $T = 300$ en de verticale lijn met vergelijking $t = 30$.

figuur 3 laboratoriumbrand



De Amerikaan Simon Ingber deed in 1928 de volgende veronderstelling:

> De deur bezwijkt tijdens de natuurlijke brand op dát tijdstip t_b, waarvoor geldt dat de oppervlakte tussen de grafiek van T_{nat}, de horizontale lijn met vergelijking $T = 300$ en de verticale lijn met vergelijking $t = t_b$ gelijk is aan de oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3.

7p **14** Onderzoek of volgens de veronderstelling van Ingber de deur tijdens de natuurlijke brand minstens 30 minuten standhoudt.

Perforatie

Voor elke waarde van p, met $p \neq 0$, is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2+1)(x-2)}$$

Er is één waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

6p **15** Bereken exact de coördinaten van die perforatie.

Hints bij examen 2017-I

1 Raken dus $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.

2 Vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ draaien over 90° linksom levert $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ of kies twee punten P op lijn k.

3 Cosinus in een niet-rechthoekige driehoek, dus gebruik cosinusregel.

4 Bereken limiet voor r naar ∞ dus maak gebruik van (standaard)limieten.

5 In de tekening zijn twee rechthoekige driehoeken te zien, dus Pythagoras gebruiken.

6 Met behulp van differentiëren dus afgeleide bepalen en maak gebruik van de formule voor de snelheid. Daarna is gebruik van rekenmachine toegestaan.

7 Genoemd worden de punten A en B, met $x(t) = y(t)$. Denk aan formules goniometrie en maak gebruik van de hoofdwaarde tabel.

8 Helling dus bepaal $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en ga na dat dit onafhankelijk van t is.
Maak gebruik van de formules $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ en $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

9 Coördinaten snijpunten berekenen dus vergelijking oplossen of maak gebruik van gegeven coördinaten van A en de lijnsymmetrie in de lijn door $S(1\frac{1}{2}, 0)$ loodrecht op k.

10 Verdeel het omwentelingslichaam in twee stukken, het deel links van punt A en het deel rechts van punt A. Maak gebruik van $A(1, -2\frac{1}{2})$, $S\ (1, 0)$ en $C\ (3\frac{1}{2}, 0)$

11 Bepaal eerst het nieuwe functievoorschrift $g(x)$, de verticale asymptoten en de inverse. Inverse, dus x en y verwisselen en herschrijven tot $y = \ldots$

12 Maximum, dus afgeleide = 0

13 Welke vergelijking moet opgelost worden?

14 Genoemd worden twee oppervlaktes. Eén oppervlakte ligt vast (het grijze deel in figuur 3): bereken deze oppervlakte. De andere oppervlakte is afhankelijk van de variabele $t = t_b$ (gebruik figuur 1 en teken in deze figuur ook de lijn $T = 300$). Beschrijf deze oppervlakte en vergelijk met oppervlakte grijze deel.

15 Voorwaarde(n) voor een perforatie teller = 0 en noemer = 0. Perforatie berekenen met behulp van ontbinden in factoren.

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2017-I

Rakende grafieken?

5p **1** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: raken dus f(x) = g(x) en f′(x) = g′(x).

$f(x) = \ln(x)$ dus $f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2$ dus $g'(x) = \frac{2}{2e} \cdot x = \frac{1}{e} \cdot x = \frac{x}{e}$ [1p]

$f(x) = g(x)$ *en* $f'(x) = g'(x)$ [1p] dus moet gelden $\ln(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2$ en $\frac{1}{x} = \frac{x}{e}$ [1p]

$\frac{1}{x} = \frac{x}{e}$ dus $x^2 = e$ dus $x = \sqrt{e}$ [1p]

$x = \sqrt{e}$ invullen in $f(x) = g(x)$ levert $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \cdot (\sqrt{e})^2$. (*Herschrijf dit en controleer of het klopt.*)

$\ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2e} \cdot e$ en dit klopt, want levert $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ [1p]

Conclusie: $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$ dus de grafieken van f en g raken elkaar.

Opmerking: $\ln(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2$ *is niet exact oplosbaar, dus niet starten met* $\ln(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2$

Bewegen over een lijn

4p **2** *Stel op, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *draaien over 90° linksom levert* $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

eerste methode met behulp van vectoren:

Vectorvoorstelling van lijn k opstellen levert $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

oftewel $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda + 3 \end{pmatrix}$ [1p]

Loodrecht en draaiing linksom dus $\vec{OP'} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda - 3 \\ \lambda \end{pmatrix}$ [1p]

Opmerking: $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda + 3 \\ -\lambda \end{pmatrix}$ *klopt niet, want draaiing rechtsom*

$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda - 3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}\lambda - 3 \\ \frac{1}{2}\lambda + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ [1p]

y uitdrukken in x, dus eliminatie van λ levert:

$x = 1\frac{1}{2}\lambda - 3$ dus $\lambda = \frac{2}{3}x + 2$ dus

$y = \frac{1}{2}\lambda + 3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2\right) + 3$ dus $y = \frac{1}{3}x + 4$ [1p]

of in plaats van eliminatie van λ met behulp van de richtingsvector de richtingscoëfficiënt bepalen:

richtingsvector $\vec{rv}_{OQ} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{3}$ en punt van lijn OQ is $(-3, 3)$ dus $y = \frac{1}{3}x + 4$

Conclusie: vergelijking van lijn m is $y = \frac{1}{3}x + 4$

tweede methode met behulp van twee punten van lijn OQ:
P ligt op k. Twee punten van k zijn bijvoorbeeld (0, 3) en (6, 0) [1p]

Als P is (0, 3) dan geldt $\vec{OP'} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ [1p]

Als P is (6, 0) dan geldt $\vec{OP'} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ [1p]

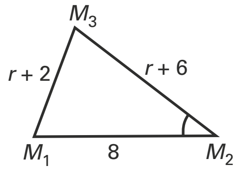
Lijn m gaat door (–3, 3) en (6, 6)

richtingscoëfficiënt is $\frac{6-3}{6--3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ en punt van lijn OQ is (–3, 3) dus $y = \frac{1}{3}x + 4$

Conclusie: vergelijking van lijn m is $y = \frac{1}{3}x + 4$ [1p]

Een derde cirkel

4p **3** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: cosinus in een niet-rechthoekige driehoek, dus gebruik cosinusregel.



$M_1M_3^2 = M_1M_2^2 + M_3M_2^2 - 2 \cdot M_1M_2 \cdot M_3M_2 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$

$(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r+6) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$ [2p]

$r^2 + 4r + 4 = 64 + r^2 + 12r + 36 - (16r + 96) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$

$8r + 96 = (16r + 96) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$ [1p]

$\frac{8r+96}{16r+96} = \cos(\angle M_1M_2M_3)$

Conclusie: $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$ [1p]

Opmerking: het resultaat van deze opgave kan misschien gebruikt worden in de volgende opgaven.

3p **4** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: bereken limiet dus maak gebruik van standaardlimieten.

eerste methode:

$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{r+12}{2r+12}\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{\frac{r}{r}+\frac{12}{r}}{\frac{2r}{r}+\frac{12}{r}}\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1+\frac{12}{r}}{2+\frac{12}{r}}\right) = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$ [2p]

dus $\lim_{r\to\infty}\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}$

Conclusie: $\angle M_1M_2M_3$ nadert tot 60° [1p]

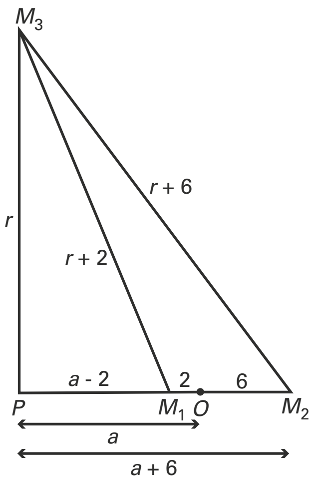
tweede methode:

Voor grote waarden van r zijn de termen 12 verwaarloosbaar, dus $\frac{r+12}{2r+12}$ nadert dan tot $\frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ [2p]

dus $\lim_{r\to\infty}\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}$

Conclusie: $\angle M_1M_2M_3$ nadert tot 60° [1p]

6p **5** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: in de tekening zijn twee rechthoekige driehoeken te zien, dus Pythagoras gebruiken.



eerste methode met behulp van Pythagoras:
Noem de lengte van zijde PO bijvoorbeeld a. De x-coördinaat van M_2 is 6.

In de kleine driehoek geldt $M_1P^2 + M_3P^2 = M_1M_3^2$

dus $(a-2)^2 + r^2 = (r+2)^2$ [1p]

In de grote driehoek geldt $M_2P^2 + M_3P^2 = M_1M_3^2$

dus $(a+6)^2 + r^2 = (r+6)^2$ [1p]

$(a-2)^2 + r^2 = (r+2)^2$ dus $a^2 - 4a + 4 + r^2 = r^2 + 4r + 4$

dus $a^2 - 4a = 4r$ [1p]

$(a+6)^2 + r^2 = (r+6)^2$ dus $a^2 + 12a + 36 + r^2 =$

$r^2 + 12r + 36$ dus $a^2 + 12a = 12r$ [1p]

Deze twee vergelijkingen combineren levert:

$a^2 + 12a = 3a^2 - 12a$ dus

$2a^2 - 24a = 0$ dus $a = 12$ (of $a = 0$) [1p]

dus bijvoorbeeld $a^2 - 4a = 4r$ levert $12^2 - 4 \cdot 12 = 4r$

Conclusie: $r = 24$ [1p]

tweede methode met behulp van Pythagoras en de formule uit onderdeel 3:
In de grote driehoek geldt $M_2P^2 + M_3P^2 = M_2M_3^2$ dus $M_2P^2 + r^2 = (r+6)^2$
dus $M_2P^2 + r^2 = r^2 + 12r + 36$ [1p]

dus $M_2P = \sqrt{12r+36}$ [1p]

dus $\cos(\angle PM_2M_3) = \dfrac{\sqrt{12r+36}}{r+6}$ [1p] en ook $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \dfrac{r+12}{2r+12}$ (zie opgave 3)

$\angle PM_2M_3 = \angle M_1M_2M_3$ dus $\cos(\angle PM_2M_3) = \cos(\angle M_1M_2M_3)$

dus geldt $\dfrac{r+12}{2r+12} = \dfrac{\sqrt{12r+36}}{r+6}$ [1p] dus $\dfrac{r+12}{2r+12} = \dfrac{2\sqrt{12r+36}}{2r+12}$ dus $r + 12 = 2\sqrt{12r+36}$

dus $(r+12)^2 = 4 \cdot (12r+36)$ dus $r^2 + 24r + 144 = 48r + 144$ dus $r^2 - 24r = 0$ [1p]

Conclusie: $r = 24$ [1p]

derde methode met behulp van Pythagoras:
In de kleine driehoek geldt $M_1P^2 + M_3P^2 = M_1M_3^2$ dus $M_1P^2 + r^2 = (r+2)^2$
dus $M_1P^2 + r^2 = r^2 + 4r + 4$ [1p]

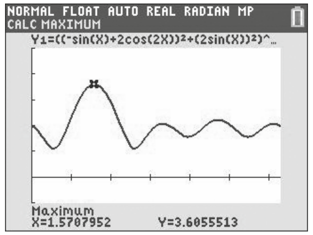
dus $M_1P = \sqrt{4r+4}$ [1p]

dit invullen in $M_2P^2 + M_3P^2 = M_1M_3^2$ oftewel in $(M_1P + 8)^2 + r^2 = (r+6)^2$ [1p] levert
$(\sqrt{4r+4} + 8)^2 + r^2 = (r+6)^2$ [1p] dus $4r + 4 + 16\sqrt{4r+4} + 64 + r^2 = r^2 + 12r + 36$
dus $2\sqrt{4r+4} = r - 4$ dus $4 \cdot (4r+4) = (r-4)^2$ dus $r^2 - 24r = 0$ [1p]
Conclusie: $r = 24$ [1p]

©ThiemeMeulenhoff

Een achtbaan

5p **6** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: met behulp van differentiëren dus afgeleide bepalen. Daarna is gebruik van rekenmachine toegestaan.



Gegeven zijn: $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(t) \end{cases}$

dus $\begin{cases} x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t) \\ y'(t) = -2\sin(t) \end{cases}$ [2p]

Snelheid, dus $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ dus $v(t) = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$ [1p]

Maximum bepalen met $y_1 = \sqrt{(-\sin(x) + 2\cos(2x))^2 + (-2\sin(x))^2}$

Calculate maximum levert $y_{max} \approx 3{,}606$ voor $x \approx 1{,}571$ [1p]

Conclusie: $v_{max} = 3{,}6$(m/s) [1p]

5p **7** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd worden de punten A en B, met x(t) = y(t). Denk aan formules goniometrie.

eerste methode:
Punten A en B berekenen met $\cos(t) + \sin(2t) = 2\cos(t)$
dus $\cos(t) - \sin(2t) = 0$ dus $\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t) = 0$ [2p]
dus $\cos(t)(1 - 2\sin(t)) = 0$

dus $\cos(t) = 0$ of $\sin(t) = \frac{1}{2}$ [1p]

dus $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ [1p]

Conclusie: het duurt $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden. [1p]

tweede methode:
Punten A en B berekenen met $\cos(t) + \sin(2t) = 2\cos(t)$ dus $\sin(2t) = \cos(t)$
dus $\sin(2t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$ [1p]

dus $2t = \frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$ of $2t = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) + k \cdot 2\pi$ [1p]

dus $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ [1p]

dus $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ [1p]

Conclusie: het duurt $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ [1p] seconden.

©ThiemeMeulenhoff

4p **8** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: helling dus bepaal $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *en ga na dat dit onafhankelijk van t is.*

Maak gebruik van de formule $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ *en* $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{2\cos(t) - 2\cos(t+\pi)}{\cos(t) + \sin(2t) - (\cos(t+\pi) + \sin(2(t+\pi)))} \text{ [1p]}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t) - -2\cos(t)}{\cos(t) + \sin(2t) - (-\cos(t) + \sin(2t+2\pi))} = \frac{2\cos(t) + 2\cos(t)}{\cos(t) + \sin(2t) - (-\cos(t) + \sin(2t))} \text{ [2p]}$$

$$\text{dus } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\cos(t)}{\cos(t) + \sin(2t) + \cos(t) - \sin(2t)} = \frac{4\cos(t)}{2\cos(t)} = 2 \text{ voor } t \neq \tfrac{1}{2}\pi \wedge t \neq \tfrac{3}{2}\pi$$

Conclusie: helling $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is altijd 2 [1p], dus onafhankelijk van t

Een gebroken functie

4p **9** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode met behulp van de vergelijking:
Analyse: coördinaten snijpunten berekenen dus vergelijking oplossen.

Coördinaten van A en B: $\frac{5}{4x-6} = x - 3\frac{1}{2}$ [1p] kruislings vermenigvuldigen geeft

$5 = (4x-6)(x-3\frac{1}{2})$ dus $4x^2 - 20x + 16 = 0$ dus $x^2 - 5x + 4 = 0$ [1p]

dus $(x-4)(x-1) = 0$

dus $x = 4$ (en $x = 1$) [1p]

Conclusie: $B(4, \frac{1}{2})$ [1p]

tweede methode door gebruik te maken van symmetrie:
Analyse: maak gebruik van gegeven coördinaten van A en de lijnsymmetrie in de lijn door $S(1\frac{1}{2}, 0)$ *loodrecht op k.*

Coördinaten van A zijn $(1, -2\frac{1}{2})$

en de verticale asymptoot is $x = 1\frac{1}{2}$ (want noemer is $4x-6=0$) [1p],

dus snijpunt van deze verticale asymptoot met de x-as is $S(1\frac{1}{2}, 0)$ [1p]

Van A naar S is $\frac{1}{2}$ naar rechts en $2\frac{1}{2}$ omhoog (zie figuur 2)

dus van S naar B is $2\frac{1}{2}$ naar rechts en $\frac{1}{2}$ omhoog [1p]

Conclusie: $B(4, \frac{1}{2})$ [1p]

5p **10** *Bereken exact, dus gebruik grafische deel van rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: verdeel het omwentelingslichaam in twee stukken, het deel links van punt A en het deel rechts van punt A.

Kies $A(1, -2\frac{1}{2})$, $S(1, 0)$ *en* $C(3\frac{1}{2}, 0)$

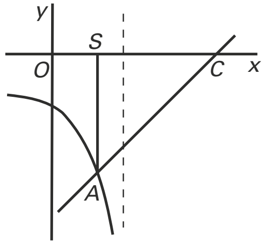
eerste methode:
Analyse vervolg: het deel rechts van punt A is een kegel, dus gebruik integraal is niet nodig.
Het deel rechts van punt A is een kegel met straal grondvlak $AS = 2\frac{1}{2}$ en

hoogte $CS = h = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$

$\text{Inh.}_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2\frac{1}{2} = 5\frac{5}{24}\pi$ [2p]

Linker deel: grenzen zijn $x = 0$ en $x = 1$ dus inhoud berekenen met $\pi\int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx =$ [1p]

en $(f(x))^2 = \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 = 25 \cdot (4x-6)^{-2}$ heeft als primitieve



$F(x) = \frac{-25}{4}(4x-6)^{-1}$ [1p]

$$\text{inh.} = \pi\int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \frac{25}{(4x-6)^2} dx = \pi\int_0^1 (25 \cdot (4x-6)^{-2})\, dx$$

$$= \pi\left[\frac{-25}{4}(4x-6)^{-1}\right]_0^1 = \pi\left[\frac{-25}{4(4x-6)}\right]_0^1 = 2\frac{1}{12}\pi$$

Conclusie: inhoud $= 5\frac{5}{24}\pi + 2\frac{1}{12}\pi = 7\frac{7}{24}\pi$ [1p]

tweede methode:
Rechter deel: grenzen zijn $x = 1$ en $x = 3\frac{1}{2}$ dus inhoud te berekenen met

$$\text{inh.} = \pi\int_1^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\tfrac{1}{2}\right)^2 dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}\left(x - 3\tfrac{1}{2}\right)^3\right]_1^{3\frac{1}{2}} = 5\tfrac{5}{24}\pi \text{ en [2p]}$$

Linker deel: grenzen zijn $x = 0$ en $x = 1$ dus inhoud berekenen met $\pi\int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx$ [2p]
zie verder eerste methode

Conclusie: inhoud $= 5\frac{5}{24}\pi + 2\frac{1}{12}\pi = 7\frac{7}{24}\pi$ [1p]

4p **11** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: bepaal eerst het nieuwe functievoorschrift g(x), de verticale asymptoten en de inverse.
Inverse, dus x en y verwisselen en herschrijven tot y = ...

eerste methode met behulp van de inverse:

$f(x) = \frac{5}{4x-6}$ wordt a omhoog verschoven dus $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$

verticale asymptoot van g is $x = 1\frac{1}{2}$ (want noemer is $4x-6=0$) [1p]

inverse van $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$ berekenen met $y = \frac{5}{4x-6} + a$ is $y - a = \frac{5}{4x-6}$

dus $4x - 6 = \frac{5}{y-a}$

dus $x = \dfrac{\frac{5}{y-a} + 6}{4}$ dus inverse van g is $y = \dfrac{\frac{5}{x-a} + 6}{4}$ (of $y = \frac{5}{4(x-a)} + 1\frac{1}{2}$) [1p]

verticale asymptoot van g_{inv} is dus $x = a$ [1p]

De verticale asymptoot van g is $x = 1\frac{1}{2}$ dus geldt dat de asymptoten van g_{inv} zijn:

$x = 1\frac{1}{2} + 4 = 5\frac{1}{2}$ en $x = 1\frac{1}{2} - 4 = -2\frac{1}{2}$ (want de afstand tussen de verticale asymptoten is 4)

Conclusie: $a = 5\frac{1}{2}$ of $a = -2\frac{1}{2}$ [1p]

tweede methode met behulp van de figuur:
Analyse: de verticale asymptoot van de inverse ontstaat door de horizontale asymptoot van g te spiegelen in de lijn y = x.

$f(x) = \frac{5}{4x-6}$ wordt a omhoog verschoven dus $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$

verticale asymptoot van g is $x = 1\frac{1}{2}$ [1p]

en de horizontale asymptoot van g is $y = a$ [1p] dus inverse van g heeft als verticale asymptoot $x = a$ [1p]

de afstand tussen $x = a$ en $x = 1\frac{1}{2}$ is 4

Conclusie: $a = 5\frac{1}{2}$ of $a = -2\frac{1}{2}$ [1p]

Brandwerendheid van een deur

5p **12** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maximum, dus afgeleide = 0

eerste methode maak gebruik van $y = 20 + 1050 \cdot e^t$ is een stijgende functie:

$T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9}$ is maximaal als $y = -\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9$ is maximaal [2p],

dus als $y' = \frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t} = 0$ [1p] dus als $2\ln(t) = 6$ dus als $\ln(t) = 3$ en dus $t = e^3$ [1p]

$\ln(t) = 3$ combineren met $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9}$ levert

$T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-9+6\cdot3-9} = 20 + 1050 \cdot e^0 = 1070$ [1p]

Conclusie: maximale temperatuur is 1070 (°C)

tweede methode met behulp van de afgeleide functie van T:

$T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9}$ is maximaal als

$T_{nat}'(t) = 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} \cdot \left(\frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t}\right) = 0$ [2p],

dus als $\frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t} = 0$ [1p] dus als $2\ln(t) = 6$ dus als $\ln(t) = 3$ en $t = e^3$ [1p]

$t = e^3$ invullen in $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9}$ levert
$T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-9+6\cdot3-9} = 20 + 1050 \cdot e^0 = 1070$ [1p]
Conclusie: maximale temperatuur is 1070 (°C)

4p **13** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: welke vergelijking moet opgelost worden?

$20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$ [1p] dus $\log(8t + 1) = \frac{280}{345}$ (of $\log(8t + 1) = 0{,}8116$) [1p]

Dus $8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$ (of $8t + 1 = 6{,}4803$) [1p], dus $t = \frac{1}{8} \cdot (10^{\frac{280}{345}} - 1) \approx 0{,}6850$ [1p]

Conclusie: $t = 0{,}685$

7p **14** *Onderzoek, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*

eerste methode:
Analyse: genoemd worden twee oppervlaktes. Eén oppervlakte ligt vast (het grijze deel), de andere oppervlakte is afhankelijk van de variabele $t = t_b$.
Beschrijf deze twee oppervlaktes. Deze oppervlaktes moeten gelijk zijn.

Oppervlakte grijze deel in figuur 3:

opp. = $\int_{0,69}^{30} (20 + 345 \cdot \log(8t + 1) - 300)\, dt = 11\,929$ [2p]

Linkergrens bepalen van de oppervlakte in figuur 1: $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} = 300$
Dus $y_1 = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(x)+6\cdot\ln(x)-9}$ en $y_2 = 300$ calculate intersect [1p] levert de linkergrens ($x =$) $t = 6{,}36$ [1p]

Oppervlakte eerst genoemde deel in kader: opp. = $\int_{6,36}^{t_b} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} - 300)dt$ (zie figuur 1)

Oppervlakte andere deel: opp. = $\int_{6,36}^{t_b} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} - 300)\, dt$

Oplossen opp. = $\int_{6,36}^{t_b} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} - 300)\, dt = 11\,929$

Voer in $y_1 = \int_{6,36}^{x} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(x)+6\cdot\ln(x)-9} - 300)\, dx$ en kijk in de tabel [1p],

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS ▲ TO EDIT FUNCTION

X	Y1
24	10163
25	10892
26	11604
27	12296
28	12967
29	13616
30	14242
31	14844
32	15421
33	15974
34	16502

Y1=11603.5367277

$x = 25$ geeft y_1 = oppervlakte = 10 892, $x = 26$ geeft y_1 = oppervlakte = 11 604,
$x = 27$ geeft y_1 = oppervlakte = 12 296
Dus voor t_b tussen 26 en 27 minuten [1p] wordt de oppervlakte van 11 929 bereikt.
Conclusie: de deur houdt bij een natuurlijke brand geen 30 minuten stand. [1p]
Opmerking: vergeet in de integraal de term 300 niet.

tweede methode:
Analyse: genoemd worden twee oppervlaktes. Eén oppervlakte ligt vast (het grijze deel), de andere oppervlakte is afhankelijk van de variabele $t = t_b$.
Neem $t_b = 30$ en vergelijk de twee oppervlaktes.

Oppervlakte grijze deel in figuur 3:

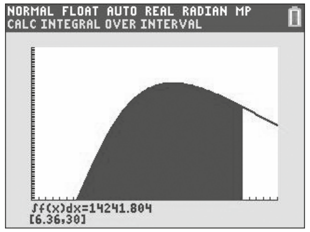
opp. = $\int_{0,69}^{30} (20 + 345 \cdot \log(8t + 1) - 300)\, dt = 11\,929$ [2p]

Linkergrens bepalen van de oppervlakte in figuur 1: $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} = 300$
Dus $y_1 = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(x)+6\cdot\ln(x)-9}$ en $y_2 = 300$ calculate intersect [1p] levert de linkergrens ($x =$) $t = 6{,}36$ [1p]

Oppervlakte als andere deel loopt van 6,36 tot en met 30:

opp. = $\int_{6,36}^{30} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} - 300)\, dt$ [1p]

Geeft opp. = $\int_{6,36}^{30} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\cdot\ln(t)-9} - 300)\, dt = 14\,242$ [1p]



De oppervlakte bij de natuurlijke brand is groter dan de oppervlakte bij de laboratoriumbrand.
Conclusie: de deur houdt bij een natuurlijke brand minder dan 30 minuten stand. [1p]
Opmerking: vergeet in de integraal de term 300 niet.

Perforatie

6p **15** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: noteer de voorwaarde(n) voor een perforatie. Perforatie berekenen met behulp van ontbinden in factoren.

eerste methode:
Perforatie: teller = 0 én noemer = 0, dus $px^2+4px+6=0$ én $(x^2+1)(x-2)=0$
Uit $(x^2+1)(x-2)=0$ volgt dat voor de perforatie moet gelden: $x=2$ [1p]

$x=2$ combineren met $px^2+4px+6=0$ levert $4p+8p+6=0$ dus $p=-\frac{1}{2}$ [2p]

Perforatie berekenen: $f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2-2x+6}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{-\frac{1}{2}(x^2+4x-12)}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{-\frac{1}{2}(x-2)(x+6)}{(x^2+1)(x-2)}$ [1p]

$=\dfrac{-\frac{1}{2}(x+6)}{(x^2+1)}$ (voor $x\neq 2$) [1p]

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}(2+6)}{(2^2+1)}=-\dfrac{4}{5}$ [1p]

Conclusie: perforatie is dus $(2,-\frac{4}{5})$

tweede methode:
Perforatie: teller = 0 én noemer = 0, dus $px^2+4px+6=0$ én $(x^2+1)(x-2)=0$

Uit $px^2+4px+6=0$ volgt dat voor de perforatie moet gelden: $x=\dfrac{-4p\pm\sqrt{16p^2-24p}}{2p}$ [1p]

Uit $(x^2+1)(x-2)=0$ volgt dat voor de perforatie moet gelden: $x=2$

$x=2$ combineren met $x=\dfrac{-4p\pm\sqrt{16p^2-24p}}{2p}$ levert $\dfrac{-4p\pm\sqrt{16p^2-24p}}{2p}=2$ [1p]

dus $\pm\sqrt{16p^2-24p}=8p$ dus $16p^2-24p=64p^2$ dus $48p^2+24p=0$

dus $p=-\frac{1}{2}$ (of $p=0$) [1p]

Perforatie berekenen: $f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2-2x+6}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{-\frac{1}{2}(x^2+4x-12)}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{-\frac{1}{2}(x-2)(x+6)}{(x^2+1)(x-2)}$ [1p]

$=\dfrac{-\frac{1}{2}(x+6)}{(x^2+1)}$ (voor $x\neq 2$) [1p]

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}(2+6)}{(2^2+1)}=-\dfrac{4}{5}$ [1p]

Conclusie: perforatie is dus $(2,-\frac{4}{5})$

©ThiemeMeulenhoff

Examen 2017-II

Twee machten van 2

De functie f is gegeven door:

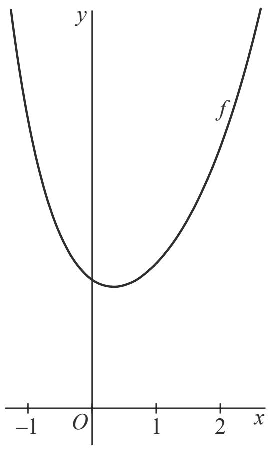
$f(x)=2^x+2^{-2x}$

In figuur 1 is een deel van de grafiek van f weergegeven.

De functie heeft één extreme waarde en dat is een minimum.

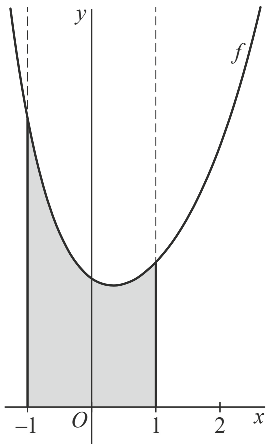
5p **1** Bereken exact de waarde van x waarvoor $f(x)$ minimaal is.

figuur 1

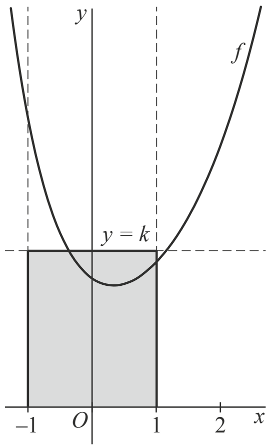


In figuur 2 is het gebied grijs gemaakt dat wordt begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x=-1$ en $x=1$.
In figuur 3 is het rechthoekige gebied grijs gemaakt dat wordt begrensd door de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x=-1$, $x=1$ en $y=k$.
De waarde van k is zo gekozen dat het grijze gebied uit figuur 2 en het grijze gebied uit figuur 3 dezelfde oppervlakte hebben.

figuur 2



figuur 3



5p **2** Bereken algebraïsch de waarde van k. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Op de grafiek van f liggen de punten $A(1, 2\frac{1}{4})$ en $Q(2, 4\frac{1}{16})$. Ook ligt op de grafiek van f het punt P. Gegeven is dat de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AQ}$ loodrecht op elkaar staan.

5p **3** Bereken de x-coördinaat van P in twee decimalen nauwkeurig.

Een grafiek met een knik

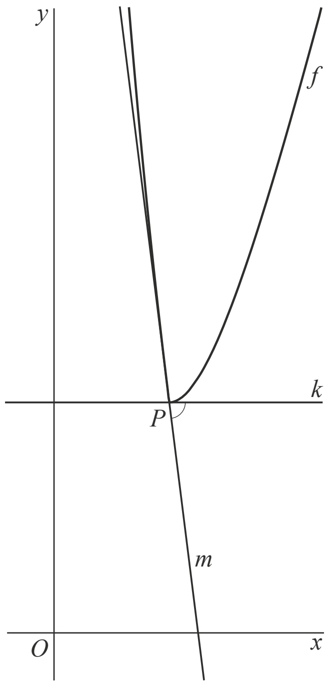
De functie f is gegeven door:

$f(x) = 4e^{2-x} + |8 - 4x|$

De grafiek heeft een knik in het punt P. Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen.
De raaklijn in P aan het linkerdeel van de grafiek van f is lijn m. De raaklijn in P aan het rechterdeel van de grafiek van f is lijn k.
In figuur 1 zijn de grafiek van f en de raaklijnen k en m weergegeven. Lijn k is evenwijdig aan de x-as. De hoek die de twee raaklijnen maken is ook in figuur 1 aangegeven.

5p **4** Bereken algebraïsch de hoek tussen de lijnen k en m.

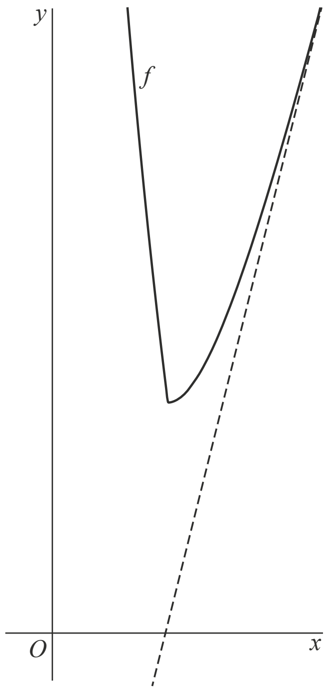
figuur 1



De grafiek van f heeft een asymptoot.
Deze is in figuur 2 aangegeven.

3p **5** Bepaal op exacte wijze een vergelijking van deze asymptoot.

figuur 2

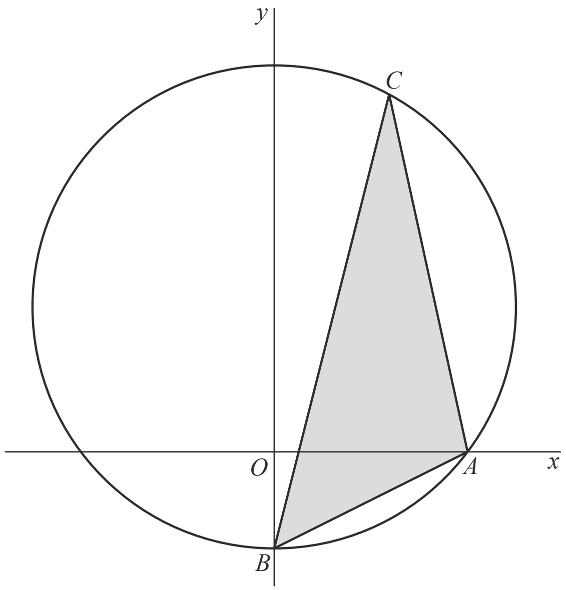


Driehoek in cirkel

In een assenstelsel liggen de punten $A(4, 0)$ en $B(0, -2)$ op de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

We bekijken in deze opgave driehoeken ABC met punt C op de grote cirkelboog AB. Zie de figuur.

figuur



Er zijn twee plaatsen van C op de cirkel waarbij driehoek ABC een rechthoekige driehoek is.

4p **6** Bereken exact voor één van deze twee plaatsen de coördinaten van C.

Voor een bepaalde plaats van C op de cirkel is driehoek ABC een gelijkbenige driehoek met top A, dus met $AB = AC$.

6p **7** Bereken exact de coördinaten van C waarvoor dat het geval is.

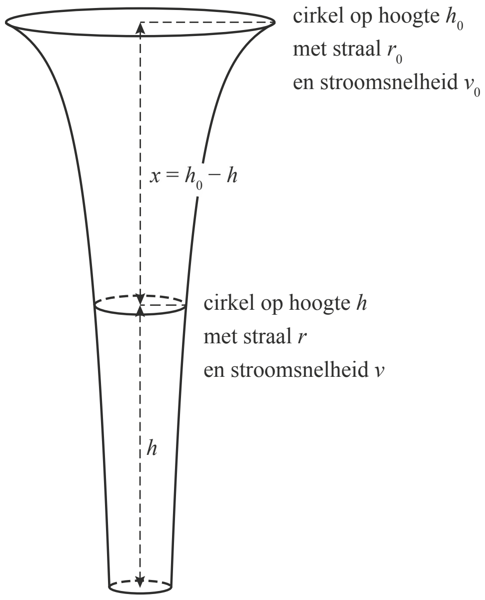
Straal van een waterstraal

In deze opgave kijken we naar water dat uit een cirkelvormige kraanopening stroomt.

In figuur 1 is de vorm van de waterstraal getekend. Op elke hoogte is de horizontale doorsnede van de waterstraal een cirkel. De straal van die cirkel wordt naar beneden toe steeds kleiner.

Op hoogte h heeft de horizontale doorsnede straal r en is de stroomsnelheid van het water v. De kraanopening heeft straal r_0 en bevindt zich op hoogte h_0. De snelheid waarmee het water uit de kraan stroomt, is v_0. Het hoogteverschil $h_0 - h$ geven we aan met x.

figuur 1



In de formules van deze opgave is meter de eenheid van lengte en meter per seconde de eenheid van snelheid.

Uit de (natuurkundige) Wet van behoud van energie volgt:

$$v_0^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh \qquad (1)$$

Hierin is g de valversnelling van 9,81 m/s^2.

De hoeveelheid water die per seconde op een bepaalde hoogte voorbijstroomt, is voor elke hoogte gelijk. Hieruit is af te leiden:

$$r_0^2 \cdot v_0 = r^2 \cdot v \qquad (2)$$

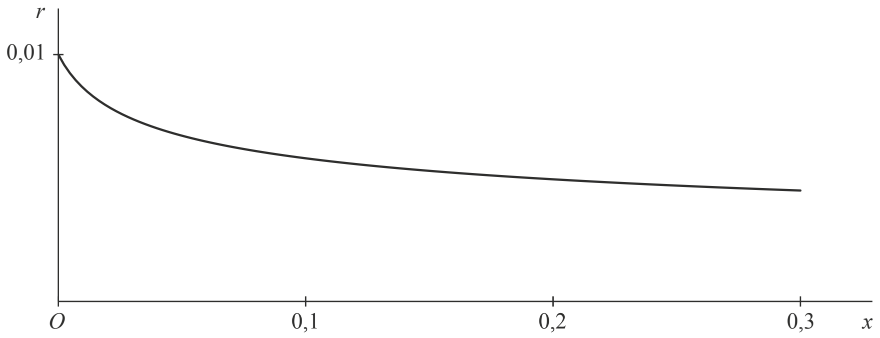
Door formule 1 en formule 2 te combineren kan worden aangetoond:

$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}} \qquad (3)$$

5p **8** Toon door formule 1 en formule 2 te combineren aan dat formule 3 juist is.

Een bepaalde kraan heeft een opening met een diameter van 2 cm. De opening bevindt zich 30 cm boven een oppervlak. De kraan wordt zo ver opengedraaid dat $v_0 = 0{,}5$ m/s.
In figuur 2 is voor deze waterkraan de grafiek getekend die het verband weergeeft tussen het hoogteverschil x en de straal r.

figuur 2



Als deze grafiek wordt gewenteld om de horizontale x-as, ontstaat de vorm van de waterstraal (90 graden linksom gedraaid).

De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan de hoeveelheid water waaruit de waterstraal op een bepaald moment bestaat.

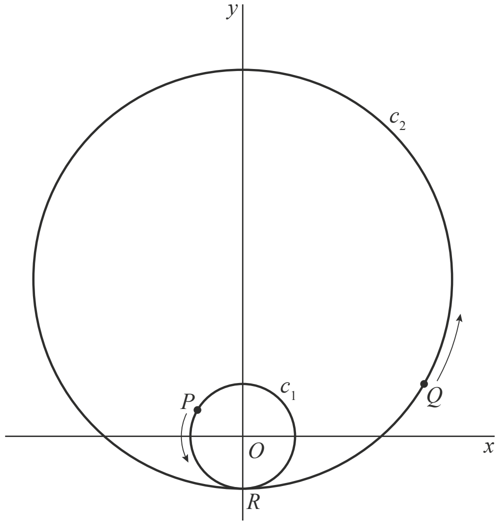
5p **9** Bereken deze hoeveelheid. Rond je eindantwoord af op een geheel aantal cm^3.

Cirkels

Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2. Cirkel c_1 heeft straal $\frac{1}{2}$ en middelpunt O. Het middelpunt van cirkel c_2 ligt op de positieve y-as.

Cirkel c_1 ligt binnen cirkel c_2. Deze twee cirkels raken elkaar in het punt $R\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Zie de figuur.

figuur



Er zijn twee bewegende punten, P en Q. Punt P draait rond over cirkel c_1, punt Q draait rond over cirkel c_2. In de figuur zijn de posities van P en Q op een bepaald tijdstip weergegeven. Verder is gegeven:
- Op $t = 0$ bevinden de punten P en Q zich in R.
- Beide punten bewegen tegen de wijzers van de klok in.
- Beide punten bewegen met constante snelheid.
- De snelheid van P is gelijk aan de snelheid van Q.
- Op $t = 12$ bevindt punt Q zich, sinds $t = 0$, voor het eerst weer in R.
- Op $t = 12$ heeft punt P precies vier maal c_1 doorlopen.

De y-coördinaat van punt Q wordt gegeven door een formule van de vorm:

$$y_Q = k + l \cdot \sin(m(t - n))$$

6p **10** Bereken waarden van k, l, m en n waarvoor deze formule in overeenstemming is met de gegevens.

De vergelijking van Arrhenius

Om een chemische reactie tot stand te brengen is een bepaalde hoeveelheid **activeringsenergie** nodig. De Zweedse scheikundige en Nobelprijswinnaar Svante Arrhenius heeft een vergelijking opgesteld die het verband aangeeft tussen het aantal reagerende moleculen, de temperatuur en de activeringsenergie:

$$k = A \cdot e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}$$

Hierin is
- A de constante van Arrhenius;
- E de activeringsenergie (in joule per mol);
- T de temperatuur (in kelvin);
- k een getal dat aangeeft hoeveel moleculen er per seconde reageren.

De vergelijking van Arrhenius kun je herleiden tot de volgende vorm:

$$E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$$

4p **11** Geef een herleiding waaruit dit blijkt.

E en A hebben voor elk soort reactie een eigen waarde. De waarden van E en A hangen niet af van de temperatuur. Omdat ze niet direct te meten zijn, meet men bij een reactie de waarde van k bij twee verschillende temperaturen. Hieruit zijn dan met de vergelijking van Arrhenius de bij die reactie horende waarden van E en A te berekenen.

Als voorbeeld bekijken we de chemische reactie waarbij stikstofdioxide wordt omgezet naar stikstofmonoxide en zuurstof.
Voor deze reactie is in een proef vastgesteld dat $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ als $T = 500$ en dat $k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ als $T = 550$.

3p **12** Bereken de waarde van E van deze reactie. Geef je eindantwoord in de vorm $a \cdot 10^5$, met a afgerond op één decimaal.

Een foto van de Eusebiuskerk

We bekijken de volgende goniometrische formule:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \qquad (1)$$

De juistheid van deze formule kan worden bewezen door gebruik te maken van:

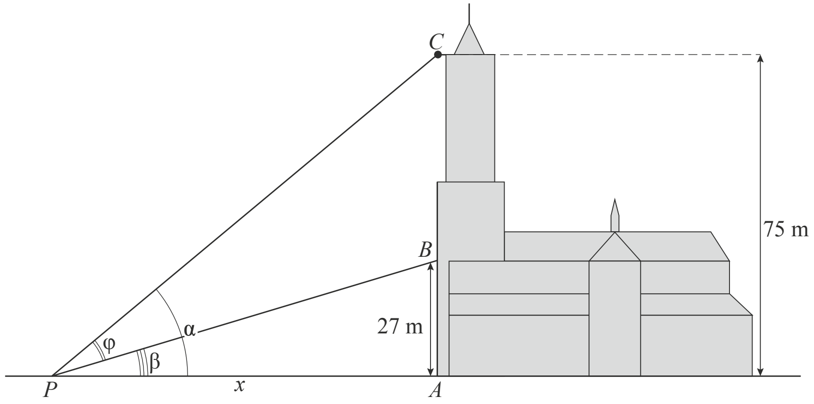
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \qquad (2)$$

3p **13** Bewijs dat formule 1 juist is.

Een fotograaf wil de toren van de Eusebiuskerk in Arnhem zo duidelijk mogelijk op de foto krijgen. Hij vraagt zich af op welke afstand van de kerk hij dan moet gaan staan. Deze afstand berekenen we in deze opgave.

In figuur 1 is de situatie schematisch weergegeven. Punt *A* is een punt aan de voet van de toren. De punten *B* en *C* liggen beide recht boven punt *A*. Punt *B* ligt op een hoogte van 27 meter boven *A*. Punt *C* ligt op een hoogte van 75 meter boven *A*.
De fotograaf staat bij punt *P* op een afstand van *x* meter van *A*. Hij zet zijn camera in *P* op de grond zó dat alleen het deel van de toren tussen *B* en *C* op de foto staat.
Er geldt: $\angle PAB = 90°$. Verder is $\alpha = \angle APC$, $\beta = \angle APB$ en $\varphi = \alpha - \beta$.
We noemen φ de **kijkhoek**.

figuur 1



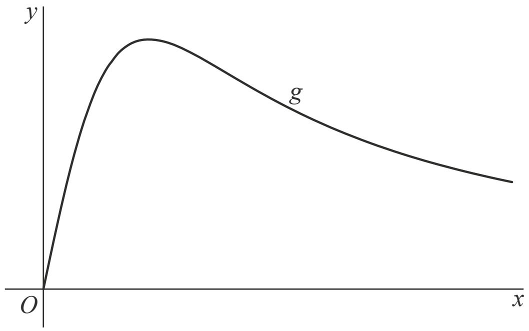
Door gebruik te maken van formule 1 is het mogelijk $\tan(\varphi)$ uit te drukken in *x*.

Er geldt: $\tan(\varphi) = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$ (3)

3p **14** Bewijs dat formule 3 juist is.

In figuur 2 is de grafiek van de functie *g* met functievoorschrift $g(x) = \dfrac{48x}{x^2 + 2025}$ geschetst.

figuur 2



Om het deel van de toren tussen *B* en *C* zo duidelijk mogelijk op de foto te krijgen, moet kijkhoek φ maximaal zijn. Dat is het geval als $\tan(\varphi)$ maximaal is. In figuur 2 is te zien dat er een waarde van *x* bestaat waarvoor $g(x)$ en dus $\tan(\varphi)$ maximaal is.

4p **15** Bereken exact op welke afstand de fotograaf moet staan zodat de kijkhoek maximaal is.

Scheve parabolen

Voor $a > 0$ is de baan van het punt P gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = at^2 + t + 1 \\ y(t) = at^2 - t + 1 \end{cases}$$ waarbij t de tijd voorstelt.

Neem $a = 3$. Dan zijn de bewegingsvergelijkingen van P dus:

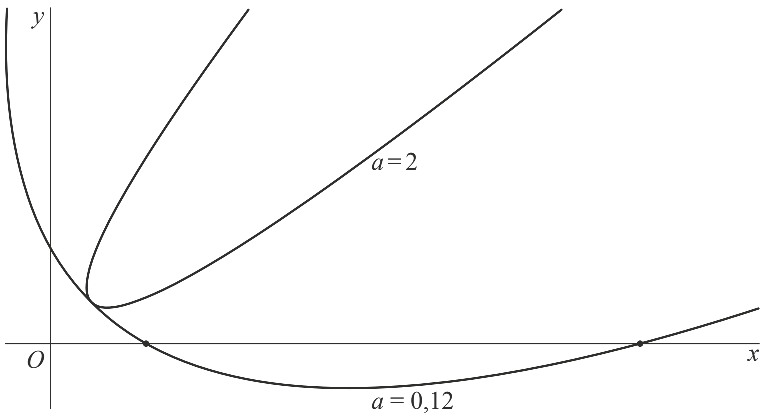
$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 + t + 1 \\ y(t) = 3t^2 - t + 1 \end{cases}$$

Voor $a = 3$ is de snelheid van P op zeker moment minimaal.

4p **16** Bereken exact deze minimale snelheid.

De baan van P is voor elke waarde van $a > 0$ een scheve parabool. In de figuur is voor twee waarden van a de baan van P weergegeven.

figuur



Voor $a = 0{,}12$ bevindt P zich op twee tijdstippen op de x-as. Voor $a = 2$ is er geen enkel tijdstip waarop P zich op de x-as bevindt. Zie de figuur.
Er is één waarde van a waarvoor P zich op precies één tijdstip op de x-as bevindt.

4p **17** Bereken exact deze waarde van a.

Hints bij examen 2017-II

1 Minimaal dus afgeleide = 0. Denk aan kettingregel.

2 Oppervlakte dus bij linker figuur integraal opstellen. Oppervlakte rechthoek rechter figuur = $2k$.

3 Loodrecht, vectoren, dus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Maak een schets met A, Q en P of maak gebruik van loodrecht dus $rc_{AP} \cdot rc_{AQ} = -1$.

4 Knik als $8 - 4x = 0$, k evenwijdig aan de x-as is gegeven, raaklijn dus gebruik afgeleide. Denk aan kettingregel.

5 $x > 2$, dus $8 - 4x$ is negatief. Gebruik $\lim\limits_{x \to \infty}$.

6 Cirkel, hoek van 90° dus Thales of loodrecht dus product richtingscoëfficiënten is –1.

7 Gelijkbenige driehoek met $AB = AC$ dus B en C liggen op een cirkel met middelpunt A.

8 Begin met het herleiden op r van de tweede formule en bekijk welke variabelen nog meer in formule 3 staan.

9 Omwentelingslichaam dus inhoud $I = \pi \int_a^b (y^2)\,dx$ met straal $r_0 = 0{,}01$ m, rechter grens is $x = 0{,}3$ m en $v_0 = 0{,}5$ m/s.

10 Gevraagd worden evenwichtslijn, amplitude, periode en startwaarde van de bijbehorende sinusoïde.

11 Herleiden, dus stap voor stap de E isoleren.

12 Met de gegeven waarden van k en T zijn twee vergelijkingen te maken. Dit stelsel van twee vergelijkingen heeft twee onbekenden (E en A) en is dus oplosbaar.

13 Omschrijven goniometrische formule dus gebruik formuleblad en definitie van tangens.

14 Formule(1) en formule (3) zijn gelijk aan elkaar. Druk $\tan(\alpha)$ en $\tan(\beta)$ uit in x.

15 Kijkhoek φ maximaal als $\tan(\varphi)$ is maximaal dus als $\frac{48x}{x^2 + 2025}$ is maximaal. Dus afgeleide is 0. Denk aan quotientregel.

16 Snelheid, dus $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ is minimaal.

17 x-as dus $y(t) = 0$ is een tweedegraads vergelijking. Deze heeft één oplossing als discriminant is 0 of één snijpunt als de kromme de x-as raakt, dus $y(t) = 0$ en $y'(t) = 0$

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2017-II

Twee machten van 2

5p **1** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: minimaal dus afgeleide = 0. Denk aan kettingregel.

eerste methode:
$f(x) = 2^x + 2^{-2x}$ dus $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{-2x} \cdot \ln(2) \cdot -2 = \ln(2) \cdot 2^x - 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-2x}$ [2p]
Dus geldt voor het minimum: $\ln(2) \cdot 2^x - 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-2x} = 0$ dus $2^x - 2 \cdot 2^{-2x} = 0$ [1p]
Dus $2^{3x} - 2 = 0$ dus $2^{3x} = 2 \; (= 2^1)$ [1p]

Conclusie: $x = \frac{1}{3}$ [1p]

tweede methode:
$f(x) = 2^x + 2^{-2x}$ dus $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{-2x} \cdot \ln(2) \cdot -2 = \ln(2) \cdot 2^x - 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-2x}$ [2p]
Dus geldt voor het minimum: $\ln(2) \cdot 2^x - 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-2x} = 0$ dus $2^x - 2 \cdot 2^{-2x} = 0$ [1p]
Dus $2^x - 2^{-2x+1} = 0$ dus $2^x = 2^{-2x+1}$ dus $x = -2x + 1$ [1p]

Conclusie: $x = \frac{1}{3}$ [1p]

5p **2** *Algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: oppervlakte dus bij linker figuur integraal opstellen. Oppervlakte rechthoek rechter figuur = 2k.

Oppervlakte linker figuur $= \int_{-1}^{1} (2^x + 2^{-2x})\,dx =$

$\left[\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x + \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-2x} \cdot \frac{-1}{2}\right]_{-1}^{1} =$ [2p]

$\left(\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^1 + \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-2 \cdot 1} \cdot \frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-1} + \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-2 \cdot -1} \cdot \frac{-1}{2}\right) =$

$\left(2 \cdot \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot 4\right) = 2 \cdot \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)} + 2 \cdot \frac{1}{\ln(2)} =$

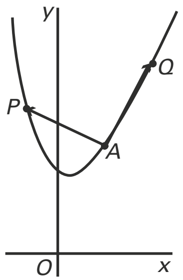
$\frac{1}{\ln(2)}(2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 3\frac{3}{8}$ ($\approx 4{,}869$) [2p]

Oppervlakte rechter figuur $= 2k$, dus $2k = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 3\frac{3}{8}$ dus $k = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{27}{16}$ (of $2k \approx 4{,}869$)

Conclusie: $k \approx 2{,}43$ [1p]

5p **3** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
eerste methode met behulp van het inproduct:

Analyse: loodrecht, vectoren, dus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Maak een schets met A, Q en P. Denk aan $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$



Gegeven zijn $A\,(1, 2\frac{1}{4})$, $Q\,(2, 4\frac{1}{16})$ en $P\,(x, 2^x + 2^{-2x})$

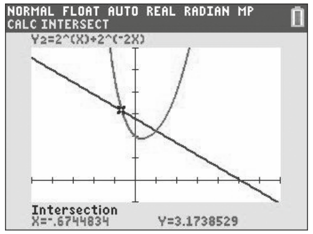
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ 2^x + 2^{-2x} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ en [1p]

$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 4\frac{1}{16} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix}$ [1p]

Loodrecht dus $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x - 1) \cdot 1 + (2^x + 2^{-2x} - 2\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{13}{16} = 0$ [1p]

$y_1 = (x - 1) \cdot 1 + (2^x + 2^{-2x} - 2\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{13}{16}$
Calculate zero levert ongeveer –0,67 [1p]
Conclusie: gevraagde x-coördinaat is –0,67 [1p]

tweede methode met behulp van een lijn loodrecht op AQ:
Analyse: loodrecht dus $rc_{AP} \cdot rc_{AQ} = -1$. Maak een schets met A, Q en P.



Gegeven zijn $A\,(1, 2\frac{1}{4})$, $Q\,(2, 4\frac{1}{16})$ en $P\,(x, 2^x + 2^{-2x})$

$rc_{AQ} = \frac{4\frac{1}{16} - 2\frac{4}{16}}{2 - 1} = \frac{1\frac{13}{16}}{1} = \frac{29}{16}$ [1p] dus $rc_{AP} = -\frac{16}{29}$ [1p]

Vergelijking van de lijn AP door $A\,(1, 2\frac{1}{4})$ met richting $-\frac{16}{29}$ is $y = -\frac{16}{29}(x - 1) + 2\frac{1}{4}$ [1p]

$y = -\frac{16}{29}(x - 1) + 2\frac{1}{4}$ snijden met $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$

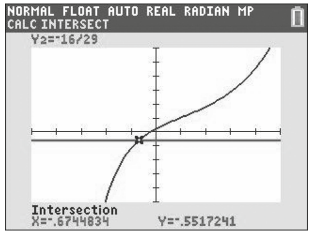
$y_1 = -\frac{16}{29}(x - 1) + 2\frac{1}{4}$

$y_2 = 2^x + 2^{-2x}$

Calculate intersect levert ongeveer –0,67 [1p]

Conclusie: gevraagde x-coördinaat is –0,67 [1p]

derde methode met behulp van de richtingscoëfficiënt:
Analyse: loodrecht dus $rc_{AP} \cdot rc_{AQ} = -1$. Maak een schets met A, Q en P.



Gegeven zijn $A\,(1, 2\frac{1}{4})$, $Q\,(2, 4\frac{1}{16})$ en $P\,(x, 2^x + 2^{-2x})$

$rc_{AQ} = \frac{4\frac{1}{16} - 2\frac{4}{16}}{2 - 1} = \frac{1\frac{13}{16}}{1} = \frac{29}{16}$ [1p] dus $rc_{AP} = -\frac{16}{29}$ [1p]

Omdat $A\,(1, 2\frac{1}{4})$ en $P\,(x, 2^x + 2^{-2x})$ geldt $rc_{AP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\frac{1}{4} - (2^x + 2^{-2x})}{1 - x}$ [1p]

Vergelijking $\frac{2\frac{1}{4} - (2^x + 2^{-2x})}{1 - x} = -\frac{16}{29}$ oplossen

$y_1 = \frac{2\frac{1}{4} - (2^x + 2^{-2x})}{1 - x}$

$y_2 = -\frac{16}{29}$

Calculate intersect levert ongeveer –0,67 [1p]
Conclusie: gevraagde x-coördinaat is –0,67 [1p]
Let op: is het aantal decimalen correct?

Een grafiek met een knik

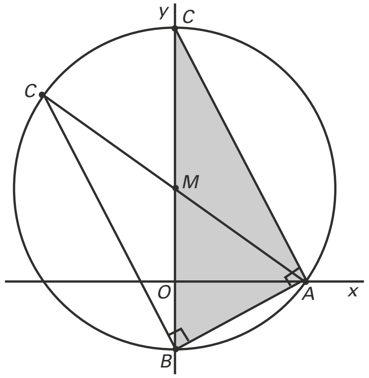
5p **4** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: knik als $8 - 4x = 0$, k evenwijdig aan de x-as is gegeven, raaklijn dus gebruik afgeleide. Denk aan kettingregel.
Knik, dus knikpunt bij $8 - 4x = 0$ dus knikpunt bij $x = 2$ [1p]
Voor $x < 2$ geldt $f(x) = 4 \cdot e^{2-x} + 8 - 4x$ [1p]
Raaklijn, dus afgeleide $f'(x) = 4 \cdot e^{2-x} \cdot -1 - 4$ [1p]
dus richting in knikpunt is $f'(2) = 4 \cdot e^{2-2} \cdot -1 - 4 = -8$ [1p]
Omdat k evenwijdig aan de x-as geldt $\alpha = \tan^{-1}(-8)$, dus $\alpha = -83°$
Conclusie: gevraagde hoek is $\alpha = 83°$ [1p]
Let op: voor $x < 2$ geldt dat $8 - 4x$ positief is. Dus geldt $|8 - 4x| = 8 - 4x$

3p **5** *Bepaal exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: $x > 2$, dus $8 - 4x$ is negatief. Gebruik $\lim\limits_{x \to \infty}$.
Voor $x > 2$ geldt $f(x) = 4 \cdot e^{2-x} - 8 + 4x$ [1p]
Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} 4 \cdot e^{2-x} = 0$ [1p] geldt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (4 \cdot e^{2-x} - 8 + 4x) = 4x - 8$

Conclusie: vergelijking van de scheve asymptoot is $y = 4x - 8$ [1p]
Let op: voor $x > 2$ geldt dat $8 - 4x$ negatief is. Dus voor $x > 2$ geldt $|8 - 4x| = -8 + 4x$

Driehoek in cirkel

4p **6** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*



eerste methode met behulp van Thales en middellijn BC:
Analyse: cirkel, hoek van 90° dus Thales.
Gegeven zijn cirkel: $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ dus $M(0, 3)$ en $r = 5$ [1p]
en de punten $A(4, 0)$ en $B(0, -2)$
Als $\angle A = 90°$, dan liggen B en C op de middellijn van de cirkel, dus op y-as (Thales). [2p]
$B(0, -2)$ en $M(0, 3)$ dus $C(0, 8)$
Conclusie: $C(0, 8)$ (er wordt gevraagd naar één van de twee punten C) [1p]

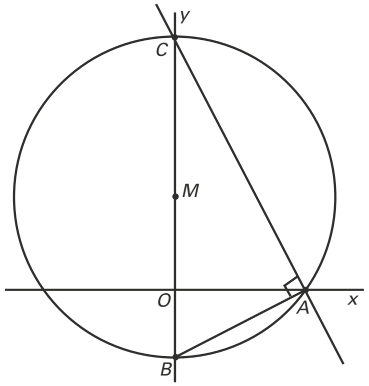
tweede methode met Thales en middellijn AC:
Analyse: cirkel, loodrecht dus Thales.
Gegeven zijn cirkel: $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ dus $M(0, 3)$ en $r = 5$ [1p]
en de punten $A(4, 0)$ en $B(0, -2)$
Als $\angle B = 90°$, dan is middellijn de lijn AC met $M(0, 3)$ op AC (Thales). [2p]

$A(4, 0)$ en $M(0, 3)$ dus $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus ook $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M(0, 3)$ en $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ levert $C(-4, 6)$

Conclusie: $C(-4, 6)$ [1p]

derde methode:
Analyse: loodrecht dus product richtingscoëfficiënten is -1.



Gegeven zijn $A(4, 0)$ en $B(0, -2)$ dus richtingscoëfficiënt lijn door A en B is $rc_{BA} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \dfrac{0 - -2}{4 - 0} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Als $\angle A = 90°$, dan geldt voor richtingscoëfficiënt lijn door A en C: $rc_{AC} = -2$ [1p]
Lijn AC gaat door $A(4, 0)$ dus $y = -2(x - 4)$ [1p]
Voor snijpunt C van cirkel $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ en lijn door AC: $y = -2(x - 4)$ geldt dus:
$x^2 + ((-2(x - 4)) - 3)^2 = 25$ dus $x^2 + (-2x + 5)^2 = 25$
dus $5x^2 - 20x + 25 = 25$ dus $x^2 - 4x = 0$ [1p]
Dus $x = 0$ of $x = 4$ en invullen in lijn door AC: $y = -2(x - 4)$ levert $y = 8$ en $y = 0$
Conclusie: $C(0, 8)$ (want bij $y = 0$ hoort $A(4, 0)$) [1p]

6p **7** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: AB = AC dus B en C liggen op een cirkel met middelpunt A.

eerste methode met behulp van de cirkel met straal AB en middelpunt A:

Straal $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ [1p]

Vergelijking cirkel met middelpunt A en straal AB is: $(x - 4)^2 + y^2 = 20$. [2p]

$(x - 4)^2 + y^2 = 20$ snijden met $x^2 + (y - 3)^2 = 25$:

$(x - 4)^2 + y^2 = 20$ herschrijven geeft $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 20$ dus $x^2 + y^2 = 8x + 4$

$x^2 + (y - 3)^2 = 25$ herschrijven geeft $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$ dus $x^2 + y^2 = 6y + 16$

Dus geldt: $8x + 4 = 6y + 16$ [1p] dus $y = 1\frac{1}{3}x - 2$ is de lijn die door de snijpunten van de cirkels gaat.

Deze lijn $y = 1\frac{1}{3}x - 2$ snijden met de grote cirkel* $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ levert

$x^2 + ((1\frac{1}{3}x - 2) - 3)^2 = 25$

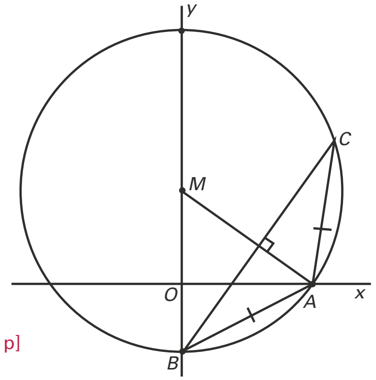
Dus $x^2 + (1\frac{1}{3}x - 5)^2 = 25$ dus $2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 25 = 25$ dus $2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x = 0$ levert

$x = 0$ of $x = \dfrac{13\frac{1}{3}}{2\frac{7}{9}} = \dfrac{\frac{40}{3}}{\frac{25}{9}} = \dfrac{40}{3} \cdot \dfrac{9}{25} = \dfrac{8}{1} \cdot \dfrac{3}{5} = 4\dfrac{4}{5}$ dus $y = 1\dfrac{1}{3}x - 2 = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{24}{5} - 2 = 4\dfrac{2}{5}$ [2p]

Conclusie: gevraagde punt is $C(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5})$

* *Opmerking: de lijn $y = 1\frac{1}{3}x - 2$ snijden met de kleine cirkel geeft hetzelfde resultaat.*

tweede methode met behulp van loodlijn door B op AM:



$AB = AC$ dus MA staat loodrecht op BC.

$rc_{AM} = \dfrac{0 - 3}{4 - 0} = -\dfrac{3}{4}$ [1p] dus $rc_{BC} = \dfrac{4}{3}$

Vergelijking van de lijn door B loodrecht op MA

wordt $y = \dfrac{4}{3} \cdot x - 2$ [1p]

$y = \dfrac{4}{3} \cdot x - 2$ snijden met de cirkel $x^2 + (y - 3)^2 = 25$

geeft $x^2 + (\frac{4}{3} \cdot x - 2 - 3)^2 = 25$ dus $x^2 + (\frac{4}{3} \cdot x - 5)^2 = 25$ [1p]

Dus $x^2 + 1\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 25 = 25$ dus $2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x = 0$ [1p]

levert $x = 0$ of $x = 4\frac{4}{5}$ [1p]

Conclusie: gevraagde punt is $C(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5})$ [1p]

Straal van een waterstraal

5p **8** *Toon aan, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: begin met het herleiden op r van de tweede formule en bekijk welke variabelen nog meer in formule 3 staan.

Gegeven is ${r_0}^2 \cdot v_0 = r^2 \cdot v$ (formule 2) dus $r^2 = \dfrac{{r_0}^2 \cdot v_0}{v}$ dus $r = \sqrt{\dfrac{{r_0}^2 \cdot v_0}{v}} = r_0\sqrt{\dfrac{v_0}{v}}$ [1p]

Analyse vervolg: in de eindformule (3) staat een x genoemd en gegeven is $x = h_0 - h$. Combineer de $2gh_0$ met de $2gh$ uit formule (1).

Gegeven is ${v_0}^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh$ (formule 1) dus

$v^2 = {v_0}^2 + 2gh_0 - 2gh = {v_0}^2 + 2g(h_0 - h) = {v_0}^2 + 2gx$ [2p] dus $v = \sqrt{{v_0}^2 + 2gx}$

$r = r_0\sqrt{\dfrac{v_0}{v}}$ en $v = \sqrt{{v_0}^2 + 2gx}$ combineren [1p] geeft $r = r_0 \cdot \sqrt{\dfrac{v_0}{\sqrt{{v_0}^2 + 2gx}}} = r_0 \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{{v_0}^2}}{\sqrt{{v_0}^2 + 2gx}}}$

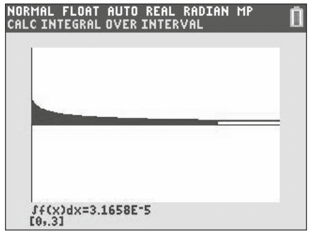
$= r_0 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2gx}\right)^{\frac{1}{2}}} = r_0 \cdot \left(\left(\dfrac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2gx}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = r_0 \cdot \left(\dfrac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2gx}\right)^{\frac{1}{4}}$ [1p]

Conclusie: $r = r_0 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2gx}}$

5p **9** *Bereken, dus gebruik grafische deel van rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: omwentelingslichaam dus inhoud $I = \pi\int_a^b (y^2)\,dx$ met straal $r_0 = 0{,}01$ m, rechter grens is $x = 0{,}3$ m en $v_0 = 0{,}5$ m/s. Let op de eenheden.
De opening bevindt zich 30 cm = 0,3 meter boven een oppervlak (rechtergrens).
$v_0 = 0{,}5$ m/s, $g = 9{,}81$ m/s^2 en straal $r_0 = 0{,}01$ m (diameter = 2 cm) zijn gegeven.

$I = \pi\int_a^b (r^2)\,dx = \pi\int_0^{0,3}\left(r_0 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2gx}}\right)^2 dx$ [2p]

$= \pi\int_0^{0,3}\left({r_0}^2 \cdot \sqrt{\dfrac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2gx}}\right) dx$



Invullen gegevens levert

$I = \pi\int_0^{0,3}\left(0{,}01^2 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot x}}\right) dx = 3{,}166 \cdot 10^{-5}$ m^3 [2p]

$= 0{,}000032$ m^3

Conclusie: inhoud = 32 cm^3 [1p]

Cirkels

6p **10** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: gevraagd worden evenwichtslijn, amplitude, periode en startwaarde van de bijbehorende sinusoïde. (Stel vergelijking c_2 op.) De snelheden van Q en P zijn even groot. Punt P heeft vier maal de cirkel doorlopen als Q de cirkel een keer doorlopen heeft. Dus de omtrek van c_2 is vier maal zo groot als de omtrek van c_1 dus ook de straal is vier maal zo groot.

Straal van $c_1 = \frac{1}{2}$, de straal van c_2 is vier keer zo groot dus 2 [2p]

dus amplitude is $l = 2$ (straal van de cirkel)

$R(0, -\frac{1}{2})$ dus middelpunt van c_2 is $M(0, 1\frac{1}{2})$ [1p] dus evenwichtslijn is $y = 1\frac{1}{2}$, dus $k = 1\frac{1}{2}$

Op $t = 12$ heeft P de cirkel één keer doorlopen dus de periode is 12, dus $m = \frac{2\pi}{12}$ [1p]

P start op $t = 0$ in $(0, -2)$, dus op $t = 3$ (na een kwart periode) gaat P stijgend door de evenwichtstand, dus $n = 3$ [1p]

Conclusie: $y_Q = 1\frac{1}{2} + 2\sin(\frac{2\pi}{12}(t - 3))$ [1p] (of $k = 1\frac{1}{2}$, $l = 2$, $m = \frac{2\pi}{12}$ en $n = 3$)

(n kan ook berekend worden door het punt $(0, -\frac{1}{2})$ in te vullen: Als $t = 0$ dan geldt:
$1\frac{1}{2} + 2\sin(\frac{2\pi}{12}(0 - n)) = -\frac{1}{2}$ dus $\sin(\frac{2\pi}{12}(0 - n)) = -1$ dus $-\frac{2\pi}{12} \cdot n = -\frac{\pi}{2}$ dus $n = 3$)

De vergelijking van Arrhenius

4p **11** *Herleid, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: herleiden, dus stap voor stap de E isoleren.

Gegeven is $k = A \cdot e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}$ dus $\dfrac{k}{A} = e^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}$ [1p] dus $\ln\left(\dfrac{k}{A}\right) = -\left(\dfrac{E}{8{,}314T}\right)$ [1p]

dus $-\ln\left(\dfrac{k}{A}\right) = \left(\dfrac{E}{8{,}314T}\right)$

Analyse vervolg: in de gegeven eindformule zijn A en k verwisseld, bedenk

$-\ln\left(\dfrac{k}{A}\right) = \ln\left(\dfrac{k}{A}\right)^{-1} = \ln\left(\dfrac{A}{k}\right)$

$-\ln\left(\dfrac{k}{A}\right) = \ln\left(\dfrac{A}{k}\right)$ dus $\dfrac{E}{8{,}314T} = \ln\left(\dfrac{A}{k}\right)$ [1p]

Conclusie: $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\dfrac{A}{k}\right)$ [1p]

Opmerking: het resultaat van deze opgave kan misschien gebruikt worden bij de volgende opgave.

3p **12** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: met de gegeven waarden van k en T zijn twee vergelijkingen te maken. Dit stelsel van twee vergelijkingen heeft twee onbekenden (E en A) en is dus oplosbaar.

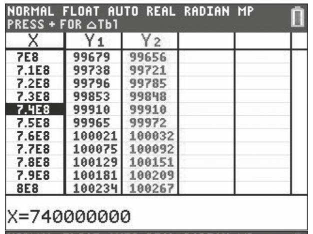
eerste methode:
Gegeven waarden voor k en T invullen in
$E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ levert het stelsel met:

$T = 500$ en $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ geeft $E = 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right)$ en

$T = 550$ en $k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ geeft $E = 8{,}314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)$ [1p]

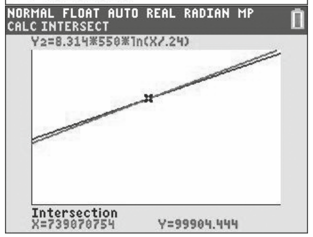
$y_1 = 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{x}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right)$

$y_2 = 8{,}314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{x}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)$


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS + FOR △Tbl

X	Y1	Y2
7E8	99679	99656
7.1E8	99738	99721
7.2E8	99796	99785
7.3E8	99853	99848
7.4E8	99910	99910
7.5E8	99965	99972
7.6E8	100021	100032
7.7E8	100075	100092
7.8E8	100129	100151
7.9E8	100181	100209
8E8	100234	100267

X=740000000

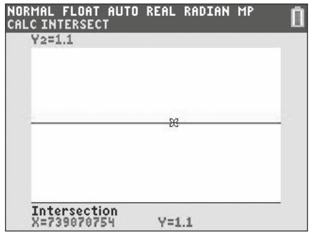


Calculate intersect [1p] levert $x = A \approx 739070754$ en
$y = E \approx 99904$
Conclusie: $E = 1{,}0 \cdot 10^5$ [1p]
Opmerking: het vinden van een geschikt Window is lastig. Gebruik Table om een geschikte beginsituatie te vinden.

tweede methode:
Analyse: met de gegeven waarden van k en T zijn twee vergelijkingen te maken. Dit stelsel van twee vergelijkingen heeft twee onbekenden (E en A) en is dus oplosbaar.
Gegeven waarden voor k en T invullen in
$E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ levert het stelsel met twee vergelijkingen:

$T = 500$ en $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ geeft $E = 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right)$ en

$T = 550$ en $k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ geeft $E = 8{,}314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)$



Opgelost moet worden

$8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right) = 8{,}314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)$ [1p]

dus $\ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right) = 1{,}1 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)$ dus $\frac{\ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right)}{\ln\left(\frac{A}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)} = 1{,}1$

$y_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right)}$

$y_2 = 1{,}1$

Calculate intersect levert [1p] $x = A = 739070754$, invullen in

$E = 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right)$ levert $E \approx 99904$

Conclusie: $E = 1{,}0 \cdot 10^5$ [1p]
Opmerking: het vinden van een geschikt Window is lastig. Gebruik vanwege $y_2 = 1{,}1$ een y-waarde dichtbij 1,1.

derde methode algebraïsch maak gebruik van $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$:
analyse: maak de vergelijking en bepaal A en daarmee E.
Gegeven waarden voor k en T invullen in $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$

$T = 500$ en $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ geeft

$E = 8{,}314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}7 \cdot 10^{-2}}\right) = 8{,}314 \cdot 500 \cdot (\ln(A) - \ln(2{,}7 \cdot 10^{-2}))$

$= 4157 \ln(A) - 4157 \ln(0{,}027)$

$T = 550$ en $k = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$ geeft

$E = 8{,}314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{A}{2{,}4 \cdot 10^{-1}}\right) = 4572{,}7 \ln(A) - 4572{,}7 \ln(0{,}24)$

dus $4157 \ln(A) - 4157 \ln(0{,}027) = 4572{,}7 \ln(A) - 4572{,}7 \ln(0{,}24)$ [1p]

$415{,}7 \ln(A) = 4572{,}7 \ln(0{,}24) - 4157 \ln(0{,}027)$

$\ln(A) = \frac{4572{,}7 \ln(0{,}24) - 4157 \ln(0{,}027)}{415{,}7}$ dus $A = e^{\frac{4572{,}7\ln(0{,}24) - 4157\ln(0{,}027)}{415{,}7}} \approx 739070754{,}4$ [1p]

Invullen geeft $E \approx 99904$
Conclusie: $E = 1{,}0 \cdot 10^5$ [1p]

Een foto van de Eusebiuskerk

3p **13** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode begin met formule 2:
Analyse: omschrijven goniometrische formule dus gebruik formuleblad en definitie van tangens. Formule (1) moet bewezen worden, ga uit van formule (2).
Omdat $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ en
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ (zie formuleblad) geldt:

$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$ [1p]

Analyse vervolg: elke term delen door $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ *dan geldt onder andere:*

$\frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$

Dus geldt $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} - \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} + \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}}$ [1p]

$= \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$ [1p]

Conclusie: $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

tweede methode begin met formule 1:
Analyse: omschrijven goniometrische formule dus gebruik formuleblad en definitie van tangens. Formule (1) moet bewezen worden, ga uit van formule (1).

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}=\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1+\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}=\frac{\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}{1+\frac{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}\ \text{[1p]}$$

$$=\frac{\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}\ \text{[1p]}$$

$$\frac{\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}=\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$ [1p] (zie

formuleblad)

Conclusie: $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

3p **14** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: formule (1) en formule (3) zijn gelijk aan elkaar. Druk tan(α) en tan(β) uit in x.

$\varphi=\alpha-\beta$ dus $\tan(\varphi)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

combineren met $\tan(\alpha)=\frac{75}{x}$ en $\tan(\beta)=\frac{27}{x}$ levert: [1p]

$$\tan(\varphi)=\frac{\frac{75}{x}-\frac{27}{x}}{1+\frac{75}{x}\cdot\frac{27}{x}}=\frac{\frac{48}{x}}{1+\frac{2025}{x^2}}=\frac{\frac{48}{x}\cdot x^2}{1\cdot x^2+\frac{2025}{x^2}\cdot x^2}\ \text{[2p]}$$

Conclusie: $\tan(\varphi)=\frac{48x}{x^2+2025}$

4p **15** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

Analyse: kijkhoek φ maximaal als tan(φ)is maximaal dus als $\frac{48x}{x^2+2025}$ is maximaal. Dus afgeleide is 0. Denk aan quotiëntregel.

$\frac{48x}{x^2+2025}$ is maximaal als de afgeleide van $\frac{48x}{x^2+2025}$ is 0 dus als

$g'(x)=\frac{48(x^2+2025)-48x\cdot 2x}{(x^2+2025)^2}=0$ [2p] dus als $48x^2+48\cdot 2025-96x^2=0$ [1p]

dus als $48x^2=48\cdot 2025$ dus $x^2=2025$

Conclusie: kijkhoek maximaal als $x=\sqrt{2025}=45$ ($x=-45$ vervalt) [1p]

©ThiemeMeulenhoff

Scheve parabolen

4p **16** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode:
Analyse: snelheid, dus $v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ is minimaal, dus afgeleide van v(t) is 0.

$v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{(6t+1)^2+(6t-1)^2}$ [2p]

Snelheid is minimaal als $v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{(6t+1)^2+(6t-1)^2}$ is minimaal,

dus als $(6t+1)^2+(6t-1)^2$ is minimaal,

dus de afgeleide van $(6t+1)^2+(6t-1)^2$ moet 0 zijn,

dus als $2\cdot 6\cdot(6t+1)+2\cdot 6\cdot(6t-1)=0$ (kettingregel),

$12(6t+1+6t-1)=0$ dus $12\cdot(12t)=0$ [1p]

dus minimale snelheid bij $t=0$.

Conclusie: dus minimale snelheid is $v(0)=\sqrt{(x'(0))^2+(y'(0))^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ [1p]

tweede methode:
Analyse: snelheid, dus $v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ is minimaal, dus $x'(t)^2+y'(t)^2$ is minimaal.

$v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{(6t+1)^2+(6t-1)^2}$ [2p]

Snelheid is minimaal als $v(t)=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{(6t+1)^2+(6t-1)^2}$ is minimaal,

dus als $\sqrt{72t^2+2}$ is minimaal [1p]
dus als $72t^2+2$ is minimaal
dus minimale snelheid bij $t=0$.
Conclusie: minimale snelheid is $v(0)=\sqrt{(x'(0))^2+(y'(0))^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ [1p]

4p **17** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode één snijpunt als discriminant = 0:
Analyse: x-as dus y(t) = 0, en één oplossing dus discriminant is 0.
Raken als $y(t)=at^2-t+1=0$ heeft één oplossing [1p]
dus discriminant is 0, dus $1-4a=0$ [2p]

Conclusie: $a=\frac{1}{4}$ [1p]

tweede methode één snijpunt als de kromme de x-as raakt:
Analyse: x-as dus y(t) = 0 en raken dus y′(t) = 0.

Raken als $y'(t)=2at-1=0$ [1p] dus als $t=\frac{1}{2a}$ [1p]

x-as raken (snijden) dus $y\left(\frac{1}{2a}\right)=a\left(\frac{1}{2a}\right)^2-\left(\frac{1}{2a}\right)+1=0$ [1p]

dus $\frac{1}{4a}-\frac{1}{2a}+1=0$ dus $-\frac{1}{4a}=-1$

Conclusie: $a=\frac{1}{4}$ [1p]

©ThiemeMeulenhoff

Examen 2018-I

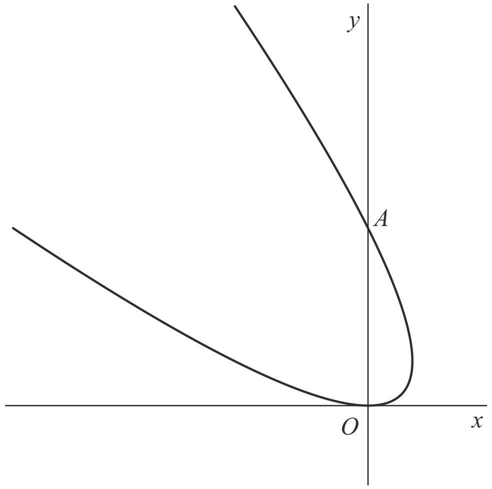
Bewegend punt

De beweging van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1 + t)^2 \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

figuur



De baan van P snijdt de y-as in de oorsprong O en in punt A.
Zie de figuur.

4p **1** Bereken exact de snelheid waarmee P door punt A gaat.

Voor elke waarde van t bevindt P zich op de kromme met vergelijking:

$(x + y)^2 = 4y$

4p **2** Bewijs dit.

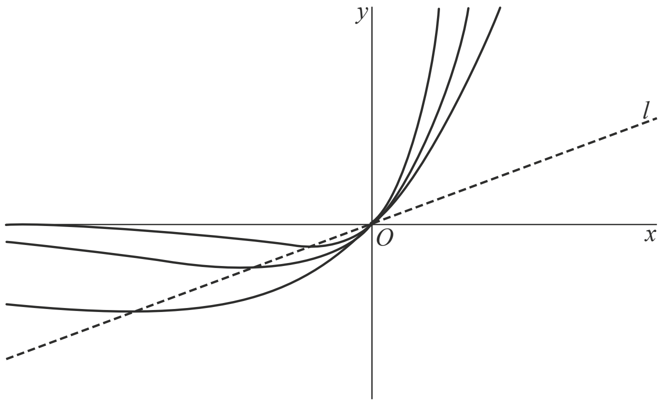
Lijn door de toppen

Voor elke waarde van a met $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = xe^{ax}$.

De afgeleide functie f_a' wordt gegeven door $f_a'(x) = e^{ax} + axe^{ax}$.
In figuur 1 zie je voor een aantal waarden van a de grafiek van f_a.

Ook is de lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{e}x$ weergegeven.

figuur 1



Voor elke waarde van a met $a > 0$ heeft de grafiek van f_a precies één top.

4p **3** Bewijs dat deze top op lijn l ligt.

De functie F_a is gegeven door:

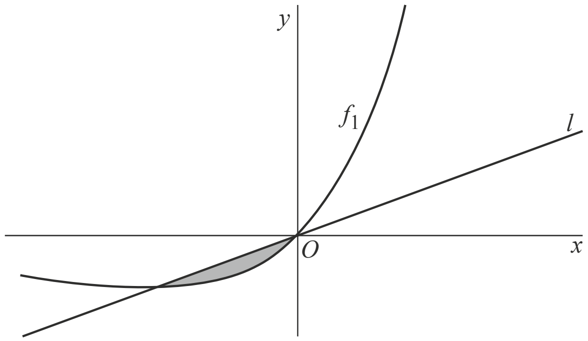
$$F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

F_a is een primitieve van f_a.

3p **4** Bewijs dat F_a inderdaad een primitieve van f_a is.

Voor f_1 geldt $f_1(x) = xe^x$. In figuur 2 is de grafiek van f_1 getekend, en ook lijn l.
Het vlakdeel tussen lijn l en de grafiek van f_1 is grijs gemaakt.

figuur 2

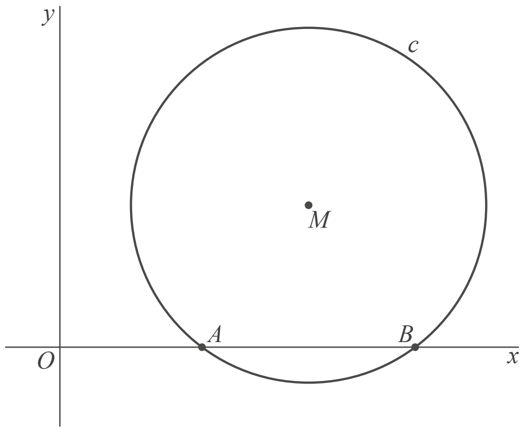


5p **5** Bereken exact de oppervlakte van het grijze vlakdeel.

Zwaartepunt en rakende cirkels

Gegeven is cirkel *c* met middelpunt *M* (14, 8) en straal 10. Deze cirkel snijdt de *x*-as in de punten *A* en *B* met $x_A < x_B$. Zie figuur 1.
In *A* bevindt zich een puntmassa met massa 3, in *B* een puntmassa met massa 1 en in *M* een puntmassa met massa 2.

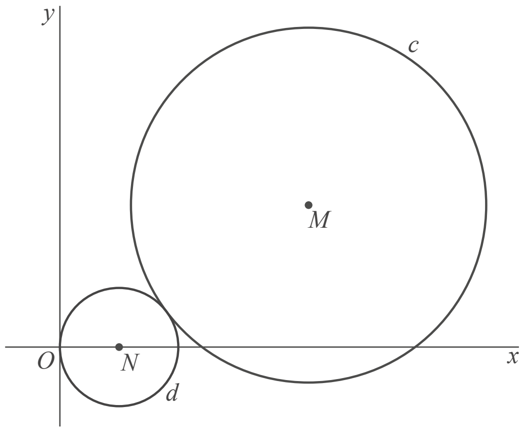
figuur 1



5p **6** Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt van deze drie puntmassa's.

De cirkel *d* met middelpunt *N* raakt de *y*-as in de oorsprong *O* en raakt cirkel *c* zoals weergegeven in figuur 2.

figuur 2



5p **7** Bereken exact de straal van cirkel *d*. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage achteraan dit examen.

Maxima en minima

De functie *f* wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.

De grafiek van *f* heeft oneindig veel toppen.

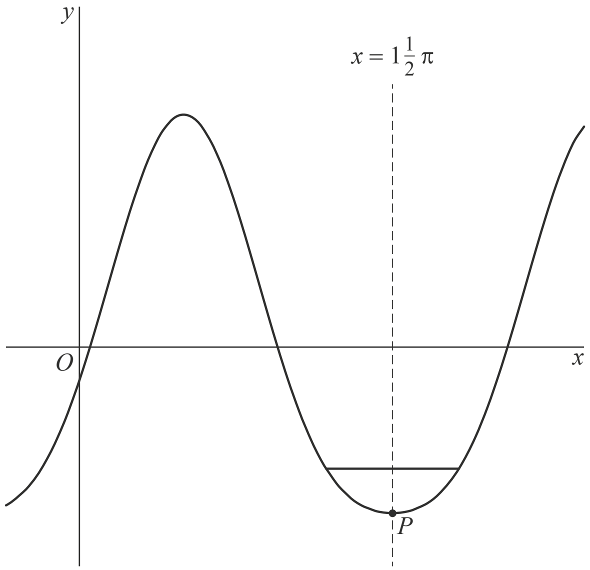
6p **8** Bereken exact de *x*-coördinaten van alle toppen van de grafiek van *f*.

Een van de toppen is het punt $P\left(1\frac{1}{2}\pi, -5\right)$.

De grafiek van *f* is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door *P*.

Boven *P* wordt een horizontaal lijnstuk van lengte 2 geplaatst, waarvan de eindpunten op de grafiek van *f* liggen. Zie de figuur.

figuur



4p **9** Bereken de afstand van *P* tot het horizontale lijnstuk. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Sheffield Winter Garden

Voor elke waarde van k met $k > 0$ wordt de functie f_k gegeven door:

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right)$$

De grafiek van f_k wordt een **kettinglijn** genoemd.

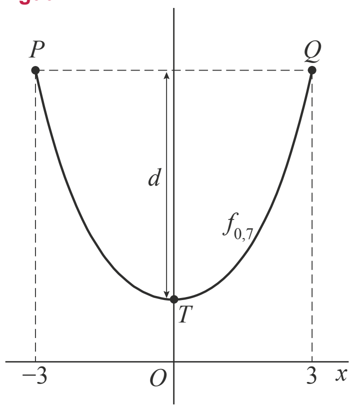
Op de grafiek van f_k worden twee punten P en Q met gelijke y-coördinaat gekozen. De lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q noemen we l. De top T van de kettinglijn ligt op de y-as. De afstand van T tot de horizontale lijn PQ noemen we d. Zie figuur 1.

Er geldt: $k = \dfrac{8d}{l^2 - 4d^2}$

In figuur 1 is voor $k = 0,7$, $x_P = -3$ en $x_Q = 3$ het bijbehorende deel van de kettinglijn getekend.

4p **10** Bereken voor de situatie van figuur 1 de lengte van het deel van de kettinglijn tussen P en Q. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

figuur 1



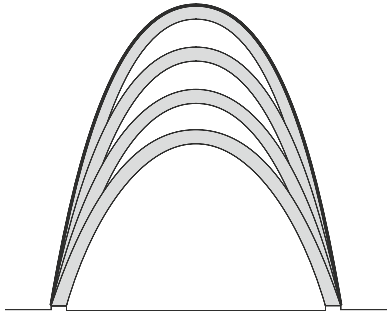
Als het deel van de grafiek van f_k tussen P en Q wordt gespiegeld in de x-as en vervolgens omhoog wordt geschoven, ontstaat een boog.

Bij de bouw van de Sheffield Winter Garden, een in 2003 geopende plantenkas, is gebruikgemaakt van dergelijke bogen. Zie de foto.

foto

De ontwerpers hebben een tekening gemaakt van het vooraanzicht van het gebouw. Dit vooraanzicht bestaat uit acht bogen. Zie figuur 2. In de rest van deze opgave kijken we naar de grootste boog. Deze boog is in figuur 2 dikker gedrukt.

figuur 2



Voor de grootste boog in deze tekening geldt:
- de lengte van de boog is 49,63 meter;
- het hoogste punt van de boog bevindt zich 20,51 meter boven de grond.

Bij deze grootste boog gaan we een functievoorschrift opstellen. We kiezen daartoe een assenstelsel waarbij de x-as door de onderste punten van de boog gaat en de top van de boog op de y-as ligt.
De eenheden langs de assen zijn meters.

In dit assenstelsel wordt de boog weergegeven door de grafiek van een functie h.
De grafiek van deze functie h ontstaat door de grafiek van een functie f_k te spiegelen in de x-as en de beeldgrafiek vervolgens omhoog te schuiven.
Er is precies één waarde van k waarvoor de beeldgrafiek de juiste lengte en hoogte heeft.

5p **11** Stel een functievoorschrift op van h. Rond de getallen in je eindantwoord af op twee decimalen.

Natuurlijke logaritme van de wortel

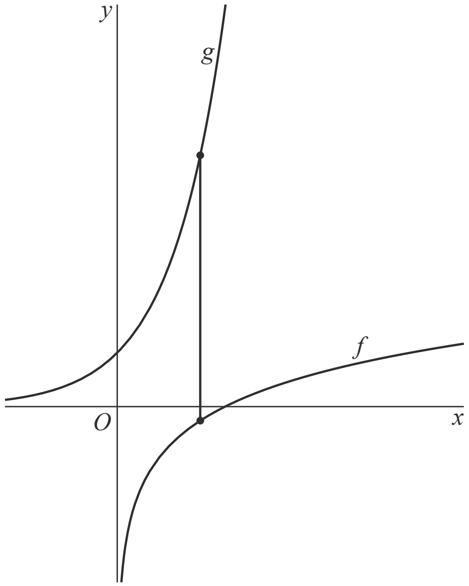
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$.

Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}. Er geldt: $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$.

3p **12** Bewijs dat inderdaad geldt $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$.

De grafiek van f^{inv} wordt ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.
Zo ontstaat de grafiek van de functie g.
Elke verticale lijn rechts van de y-as snijdt de grafiek van f in één punt en de grafiek van g in één punt. Het lijnstuk tussen deze twee punten heeft een lengte die afhangt van de plaats van de verticale lijn. Zie de figuur.

figuur



4p **13** Bereken de minimale lengte van het lijnstuk. Rond je eindantwoord af op drie decimalen.

De functie h wordt gegeven door:

$$h(x) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$$

De grafiek van h heeft rechts van de y-as één perforatie.

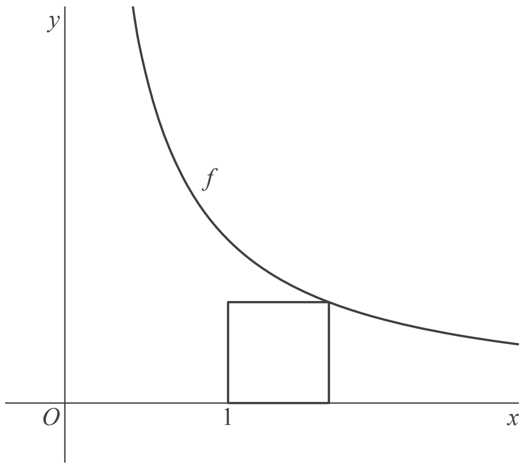
4p **14** Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

Vierkant onder grafiek

Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.

In de figuur is de grafiek van f getekend. Onder de grafiek is een vierkant getekend met twee zijden evenwijdig aan de x-as en twee zijden evenwijdig aan de y-as.

figuur



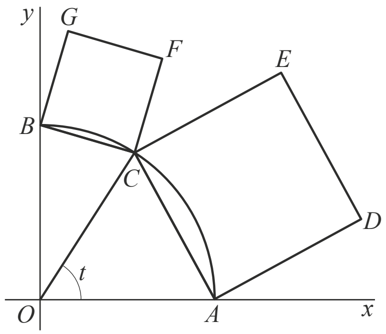
Het vierkant heeft linksonder hoekpunt (1, 0). Het hoekpunt rechtsboven ligt op de grafiek van f.

4p **15** Bereken exact de lengte van de zijde van het vierkant.

Twee vierkanten op een kwartcirkel

Gegeven zijn de punten A (1, 0) en B (0, 1). Punt C bevindt zich op de kwartcirkel door A en B met middelpunt O (0, 0). Op de lijnstukken AC en BC worden twee vierkanten $ADEC$ en $BCFG$ getekend. Zie figuur 1.

figuur 1



De grootte van hoek AOC (in radialen) noemen we t, met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.

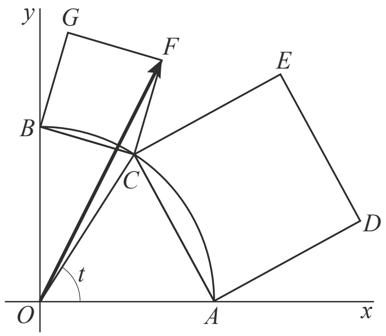
Punt C heeft dus coördinaten $(\cos(t), \sin(t))$.

Er is een waarde van t waarvoor de oppervlakte van vierkant $ADEC$ twee keer zo groot is als de oppervlakte van vierkant $BCFG$.

5p **16** Bereken deze waarde van t. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met vector $\overrightarrow{OF}$.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2

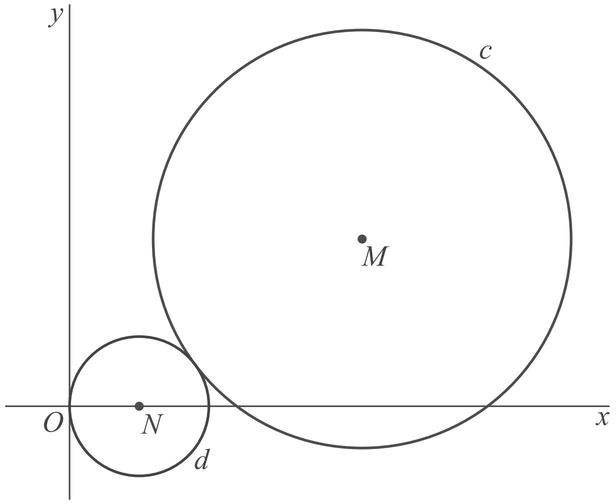


Voor elke waarde van t met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$

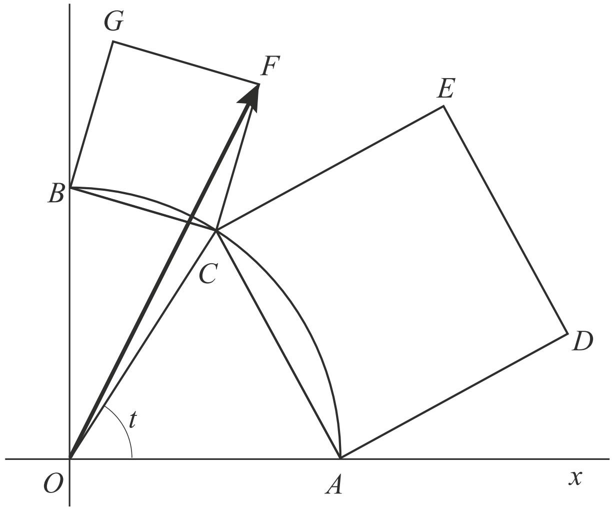
4p **17** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Uitwerkbijlage bij de vragen 7 en 17

7



17



Hints bij examen 2018-I

1 Gebruik de formule voor de snelheid $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ in punt A.

2 Substitueer $x(t) = 1 - t^2$ en $y(t) = (1 + t)^2$ in de gegeven formule.

3 De afgeleide functie is gegeven. Top dus voor x_T geldt $f'(x) = 0$. Bereken eerst de coördinaten van de top uitgedrukt in a.

4 Bewijs dat $F_a'(x) = f_a(x)$.

5 Oppervlakte, dus gebruik: $= \int_{x_S}^{x_O} (\text{bovenste} - \text{onderste})\, dx$.
De primitieve van $f(x)$ is gegeven bij onderdeel 4.

6 Bereken eerst de coördinaten van A en B. De massa's verhouden zich als 3 : 1 : 2, dus voor het zwaartepunt Z geldt: $\vec{OZ} = \frac{3}{6} \cdot \vec{OA} + \frac{1}{6} \cdot \vec{OB} + \frac{2}{6} \cdot \vec{OZ}$

7 Teken vanuit M een loodlijn MS op de x-as. Bekijk de rechthoekige driehoek MNS.

8 **Alle** x-coördinaten van de toppen berekenen, dus gebruik afgeleide = 0.
Maak gebruik van de formule $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

9 Maak gebruik van de gegeven symmetrie. Teken de verticale lijn door P en noem de snijpunten van het horizontale lijnstuk met de grafiek A en B. De afstand tussen A en B is 2. Dus de afstand tussen A en de verticale lijn is 1. Bepaal de x-coördinaat van A.

10 k is bekend, l wordt gevraagd. Bereken d met behulp van de top en de punten P of Q.

11 Spiegelen in de x-as en omhoog schuiven dus $h(x) = -f(x) + c$.
Ga na dat $l = 49{,}63$, $h(0) = d = 20{,}51$ (want top op de y-as).

12 Verwissel x en y en herleid tot $y =$

13 Bereken, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.

14 Perforatie, dus er geldt teller = 0 en noemer = 0.

15 Noem bijvoorbeeld het hoekpunt rechtsonder $(1 + a, 0)$ en ga na wat nu de y-coördinaat is van het hoekpunt rechtsboven. Welke vergelijking moet opgelost worden?

16 Bereken de lengte van AC en de lengte van BC. De coördinaten van A, C en B zijn bekend, denk bijvoorbeeld aan Pythagoras.

17 Maak gebruik van $\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} = -\vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OC}$.
Hint: roteren van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ over –90° geeft $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2018-I

Bewegend punt

4p **1** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd wordt punt A, dus bereken punt A. Genoemd wordt de snelheid, dus gebruik $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$
A ligt op de y-as, dus geldt $x(t) = 0$, dus $1 - t^2 = 0$, dus $t = 1$ of $t = -1$
$t = -1$ hoort bij O en $t = 1$ hoort bij A [1p]
$x(t) = 1 - t^2$ dus $x'(t) = -2t$
$y(t) = (1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$ dus $y'(t) = 2 + 2t$ [1p]
$x'(1) = -2$ en $y'(1) = 4$ [1p]

Conclusie: de gevraagde snelheid is $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ $(= 2\sqrt{5})$ [1p]

4p **2** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: formule is gegeven, daar kan gebruik van gemaakt worden.
eerste methode met behulp van substitutie:
$(x+y)^2 = 4y$ is gegeven. Vervang x en y met behulp van $x(t) = 1 - t^2$ en $y(t) = (1+t)^2$
Dit levert $((1-t^2) + (1+t)^2)^2 = 4 \cdot (1+t)^2$ [1p]
Dus $((1-t^2) + (1+2t+t^2))^2 = 4 \cdot (1+t)^2$
Dus $(1 - t^2 + 1 + 2t + t^2)^2 = 4 \cdot (1 + 2t + t^2)$ [1p]
Dus $(2+2t)^2 = 4 + 8t + 4t^2$ en dit klopt voor elke waarde van t. [1p]
Conclusie: voor elke waarde van t geldt $(x+y)^2 = 4y$ [1p]

tweede methode rechter en linkerkant "naar elkaar toe werken":
$(x+y)^2 = 4y$ is gegeven.
$x(t) = 1 - t^2$ en $y(t) = (1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$ dus [1p]
$x + y = 1 - t^2 + 1 + 2t + t^2 = 2 + 2t = 2(1+t)$ dus [1p]
$(x+y)^2 = (2 \cdot (1+t))^2 = 4 \cdot (1+t)^2$ en $4 \cdot y = 4 \cdot (1+t)^2$ [1p]

Conclusie: voor elke waarde van t geldt $(x+y)^2 = 4y$ [1p]

Lijn door de toppen

4p **3** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: top berekenen, dus afgeleide is 0 (afgeleide functie is al gegeven). Vergelijking lijn l is gegeven, daar kan gebruik van gemaakt worden.
eerste methode top berekenen en controleren of de top op de lijn ligt:
Top, dus voor x_T moet gelden $f_a'(x) = e^{ax} + axe^{ax} = 0$ [1p]
$e^{ax} + axe^{ax} = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(1 + ax) = 0 \Leftrightarrow e^{ax} = 0 \vee 1 + ax = 0$

$e^{ax} = 0$ heeft geen oplossing dus $x_T = \frac{-1}{a}$ en dus $y_T = x \cdot e^{ax} = \left(\frac{-1}{a}\right) \cdot e^{a \cdot \left(\frac{-1}{a}\right)} =$
$\left(\frac{-1}{a}\right) \cdot e^{-1} = \frac{-1}{a \cdot e}$ [1p]

Top $T\left(\frac{-1}{a}, \frac{-1}{a \cdot e}\right)$ invullen in l: $y = \frac{1}{e}x$ levert $\left(\frac{-1}{a \cdot e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \frac{-1}{a}$ en dit klopt. [1p]

Conclusie: de top van $f_a(x)$ ligt op de lijn l: $y = \frac{1}{e}x$ [1p]

tweede methode a uitdrukken in de x-coördinaat van de top:
Top, dus voor x_T moet gelden $f_a'(x) = e^{ax} + axe^{ax} = 0$ [1p]
$e^{ax} + axe^{ax} = 0 \Leftrightarrow e^{ax}(1 + ax) = 0 \Leftrightarrow e^{ax} = 0 \vee 1 + ax = 0$
$e^{ax} = 0$ heeft geen oplossing dus $a = \frac{-1}{x_T}$ en dus $y_T = x_T \cdot e^{\left(\frac{-1}{x_T}\right) \cdot x_T} = x_T \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot x_T$ [2p]

Conclusie: de top van $f_a(x)$ ligt op de lijn l: $y = \frac{1}{e}x$ [1p]

3p **4** *Analyse: primitieve is gegeven, maak daar gebruik van. Primitieve differentiëren moet* $f_a(x) = xe^{ax}$ *opleveren. Combineer kettingregel en productregel.*
$F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$ differentiëren door middel van:

Afgeleide van e^{ax} is $a \cdot e^{ax}$ *(kettingregel)*
Afgeleide van $\frac{1}{a}x \cdot e^{ax}$ is $\frac{1}{a} \cdot e^{ax} + \frac{1}{a}x \cdot a \cdot e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax} + xe^{ax}$ *(productregel en vereenvoudigen)* [2p]

Afgeleide van $\frac{1}{a^2}e^{ax}$ is $\frac{1}{a^2} \cdot a \cdot e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}$ *(kettingregel en vereenvoudigen)*
Dus $F_a'(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + xe^{ax} - \frac{1}{a}e^{ax} = xe^{ax}$ [1p]

Conclusie: $F_a'(x) = f_a(x)$
Opmerking: uitgaan van de gegeven primitieve en dan controleren of f(x) de afgeleide is, is makkelijker dan het vinden van de primitieve van f(x).
Opmerking: het resultaat van deze opgave kan misschien gebruikt worden bij de volgende opgave.

5p **5** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: oppervlakte dus gebruik oppervlakte $= \int_{x_S}^{x_O} (\text{bovenste} - \text{onderste})\, dx = \int_{x_S}^{x_O} (l - f_1(x))\, dx$
(x_S en x_O zijn de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken)
De functie f_1 is gegeven, de primitieve van f_a is gegeven. Maak daar gebruik van.
Primitieve van $f_1(x) = xe^x$ is $F_1(x) = \frac{1}{1} \cdot xe^{1 \cdot x} - \frac{1}{1^2} \cdot e^{1 \cdot x} = xe^x - e^x$ (zie onderdeel 4) [1p]

Primitieve van l: $y = \frac{1}{e}x$ is $\frac{1}{2e}x^2$ [1p]

Snijpunt S berekenen: $xe^x = \frac{1}{e}x$ dus $xe^x - \frac{1}{e}x = x(e^x - \frac{1}{e}) = 0$ dus $x = 0 \vee e^x = \frac{1}{e}$ dus

$x_O = 0 \vee x_S = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$ [1p]

Gevraagde oppervlakte

$$\int_{x_S}^{x_O} (l - f_1(x))\, dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{e}x - xe^x\right) dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 - (xe^x - e^x)\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{1}{2e}x^2 - xe^x + e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$= (0 - 0 + 1) - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) \text{ [1p]}$$

Conclusie: oppervlakte $= 1 - \frac{5}{2e}$ [1p]

Zwaartepunt en rakende cirkels

5p **6** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: de punten A, B en M worden genoemd, dus bereken de coördinaten van deze punten. Zwaartepunt, welke formule gebruik je daarvoor?
eerste methode bereken A en B met behulp van y = 0:
$M(14, 8)$ en straal 10 dus $c: (x-14)^2 + (y-8)^2 = 100$ [1p]
A en B liggen op de x-as dus $y = 0$
levert $c: (x-14)^2 + (0-8)^2 = 100$ [1p]
dus $c: (x-14)^2 = 36$ dus $x - 14 = 6 \vee x - 14 = -6$
dus $x_A = 8$ en $x_B = 20$ [1p]
dus $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$

In A bevindt zich een puntmassa met massa 3, in B met massa 1 en in M met massa 2, dus geldt

$\overrightarrow{OZ} = \frac{3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ [1p]

Conclusie: $Z = \left(12,\ 2\frac{2}{3}\right)$ [1p]

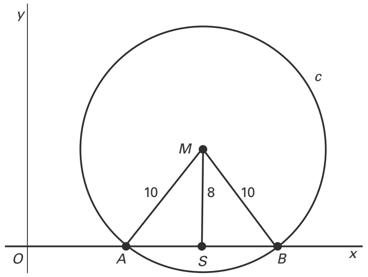
Opmerking: gevraagd wordt naar de coördinaten van Z, dus $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *is niet het correcte antwoord.*

tweede methode bereken A en B met Pythagoras:
De middelloodlijn van AB snijdt de x-as in S. Driehoek AMS heeft zijden 10 en 8 (zie figuur).

Dus lengte AS is $\sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ [1p] (Pythagoras)

Dus $x_A = 14 - 6 = 8$ en $x_B = 14 + 6 = 20$ [1p]

Dus $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$ [1p]



In A bevindt zich een puntmassa met massa 3, in B met massa 1 en in M met massa 2, dus geldt

$\overrightarrow{OZ} = \frac{3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$ dus $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ [1p]

Conclusie: $Z = \left(12,\ 2\frac{2}{3}\right)$ [1p]

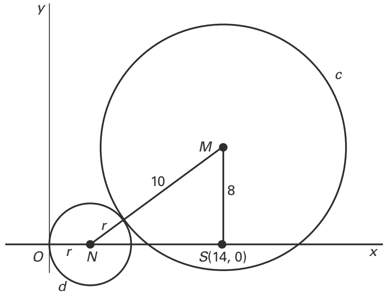
Opmerking: gevraagd wordt naar de coördinaten van Z, dus $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ *is niet*

het correcte antwoord.

Opmerking: in plaats van "Pythagoras" mag ook de "3-4-5 driehoek" genoemd worden.

5p **7** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: ga na welke (rechthoekige) driehoek een rol kan spelen bij dit probleem. Ga na waar de gevraagde straal in deze driehoek zit. Maak met behulp van de driehoek (Pythagoras) de vergelijking die opgelost moet worden.
Noem de straal van de kleine cirkel r.
De loodlijn vanuit M op de x-as snijdt de x-as in S (14, 0). [1p]
Driehoek NMS is een rechthoekige driehoek met zijden $NM = 10 + r$, $MS = 8$ en $NS = 14 - r$ [2p]
Er geldt dus $(14 - r)^2 + 8^2 = (10 + r)^2$ [1p]
Dus $196 - 28r + r^2 + 64 = 100 + 20r + r^2$ dus $48r = 160$

Conclusie: $r = 3\frac{1}{3}$ [1p]



Maxima en minima

6p **8** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: coördinaten toppen dus afgeleide = 0. Gebruik gonio-formules op formuleblad.
$f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$ dus $f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$ *(kettingregel)*
Top dus $6\cos(x) + 2\sin(2x) = 0$ [2p] *(gebruik sin(2t) = 2sin(t)cos(t))*
dus $6\cos(x) = -2\sin(2x)$ dus $6\cos(x) = -4\sin(x)\cos(x)$ [1p]
dus $\cos(x)(6 + 4\sin(x)) = 0$ [1p]

dus $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -\frac{6}{4} = -1\frac{1}{2}$ (heeft geen oplossing) [1p]

dus $\cos(x) = 0$ dus $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ [1p]

Conclusie: alleen de x-coördinaten worden gevraagd, dus $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (met k een geheel getal)
Opmerking: maxima als $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ *levert* $y = 6 - -1 = 7$*, minima als* $x = 1\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ *levert* $y = -6 - -1 = -5$

4p **9** *Bereken, rond af op twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
eerste methode door gebruik te maken van symmetrie en de lengte van het horizontale lijnstuk:
Analyse: de grafiek is symmetrisch rond de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$*. Het getekende horizontale lijnstuk*

bestaat dus uit twee even lange lijnstukken met lengte 1.

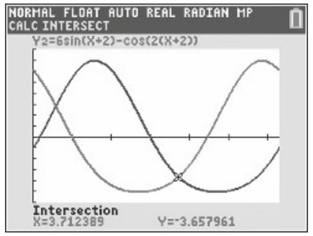
Punt A is het linker snijpunt van de horizontale lijn en de grafiek van $f(x)$.

Dus $y_A = f(1\frac{1}{2}\pi - 1) = 6\sin(1\frac{1}{2}\pi - 1) - \cos(2(1\frac{1}{2}\pi - 1)) \approx -3{,}657\ldots$ [3p]

Gegeven is punt $P(1\frac{1}{2}\pi, -5)$

Conclusie: de afstand is $y_A - y_P = -3{,}657\ldots - -5 = 1{,}342\ldots$ dus afgerond is dit 1,34 [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

tweede methode door een horizontale translatie 2 naar links of 2 naar rechts:
Punt A is het linker snijpunt en B is het rechter snijpunt van het gegeven horizontale lijnstuk en de grafiek van $f(x)$. De afstand tussen A en B is 2, dus voor deze punten geldt $f(x) = f(x + 2)$ [1p] (oftewel verschuif B twee naar links dan valt B samen met A)
Dus $6\sin(x) - \cos(2x) = 6\sin(x + 2) - \cos(2(x + 2))$
Oplossen met de grafische rekenmachine,
$y_1 = 6\sin(x) - \cos(2x)$ en
$y_2 = 6\sin(x + 2) - \cos(2(x + 2))$ [1p]
Punt A en B liggen onder de x-as, dus de y-coördinaat is negatief, dus neem het rechtersnijpunt (zie schermafbeelding).
Calc Intersect, levert $x_A \approx 3{,}712\ldots$ [1p] en $y_A \approx -3{,}657\ldots$



Gegeven is punt $P(1\frac{1}{2}\pi, -5)$

Conclusie: de afstand is $y_A - y_P = -3{,}657\ldots - -5 = 1{,}342\ldots$ dus afgerond is dit 1,34 [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.
Opmerking: berekenf(x) = f(x – 2)is ook een goede manier. A wordt dan twee naar rechts verschuiven zodat A samenvalt met B.

Sheffield Winter Garden

4p **10** *Bereken, rond af op twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: gegeven is de formule die k uitdrukt in l en d.
Bereken eerst d met behulp van $f_{0,7}$ en $x_P = -3$ en/of $x_Q = 3$. Bereken vervolgens met behulp van de formule k de waarde van l.

Gegeven zijn $k = 0{,}7$, $x_P = -3$ en $x_Q = 3$ en $k = \frac{8 \cdot d}{l^2 - 4 \cdot d^2}$

$f_{0,7}(x) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}7} \cdot (e^{0{,}7x} + e^{-0{,}7x}) = \frac{1}{1{,}4} \cdot (e^{0{,}7x} + e^{-0{,}7x})$

De afstand tussen de top T en de horizontale lijn PQ is d, dus $d = y_P - y_T$
$d = y_P - y_T = f_{0,7}(-3) - f_{0,7}(0) = 5{,}9204... - 1{,}42857... = 4{,}49187...$ [1p]
$d = 4{,}49187...$ en $k = 0{,}7$ invullen in $k = \frac{8d}{l^2 - 4d^2}$ levert $0{,}7 = \frac{8 \cdot 4{,}49187...}{l^2 - 4 \cdot 4{,}49187...^2}$ [1p]

algebraïsch oplossen of oplossen met de grafische rekenmachine
$y_1 = 0{,}7$ en $y_2 = \frac{8 \cdot 4{,}49187...}{l^2 - 4 \cdot 4{,}49187...^2}$ en Calc Intersect levert $l = 11{,}491...$ [1p]

Conclusie: de gevraagde lengte $l = 11{,}49$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

5p **11** *Rond af op twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: spiegelen in de x-as en omhoog schuiven dus h(x) = –f(x) + c.
Gegeven zijn lengte l = 49,63 en $h_k(0) = 20{,}51$ (want top h op y-as). Ook geldt d = 20,51 (want P en Q liggen bij de grafiek van h op de x-as, de top T van h ligt op de y-as).
Maak gebruik van de formule voor k.
Vanwege de spiegeling in de x-as en de verticale verschuiving, geldt

$h(x) = -f(x) + c = -\frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) + c$ [1p]
Het hoogste punt ligt 20,51 boven de grond, dus $d = h(0) = 20{,}51$
$h(0) = -f(0) + c = -\frac{1}{2k}(e^0 + e^0) + c = -\frac{1}{k} + c$ en $h(0) = 20{,}51$
dus geldt ook $-\frac{1}{k} + c = 20{,}51$ [1p]
De lengte van de boog is 49,63 meter, dit is l van de vorige opgave.

Uit $k = \frac{8d}{l^2 - 4d^2}$ en $l = 49{,}63$ en $d = 20{,}51$ volgt $k = \frac{8 \cdot 20{,}51}{49{,}63^2 - 4 \cdot 20{,}51^2} = 0{,}2102...$ [1p]
Uit $-\frac{1}{k} + c = 20{,}51$ en $k = 0{,}2102...$ volgt $-\frac{1}{0{,}2102} + c = 20{,}51$ en dus $c = 25{,}266...$ [1p]

Conclusie: $h(x) = -\frac{1}{2 \cdot 0{,}21}(e^{0{,}21x} + e^{-0{,}21x}) + 25{,}27 = -2{,}38(e^{0{,}21x} + e^{-0{,}21x}) + 25{,}27$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

Natuurlijke logaritme van de wortel

3p **12** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode m.b.v. x en y verwisselen en herleiden op y:
Gegeven $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ dus $y = \ln(\sqrt{x})$ dus inverse als $x = \ln(\sqrt{y})$ [1p]
$x = \ln(\sqrt{y})$ dus $e^x = \sqrt{y}$ [1p] dus $(e^x)^2 = y$ dus $y = e^{2x}$

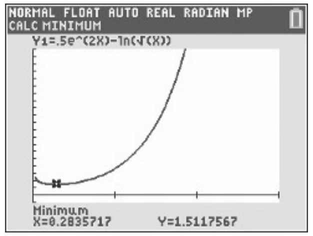
Conclusie: $f^{inv}(x) = e^{2x}$ [1p]
Opmerking: bij dit type opgave kan je beter een tussenstap te veel dan te weinig hebben.
Opmerking: de gegeven inverse kan bruikbaar zijn bij de volgende opgave.

tweede methode m.b.v. x en y verwisselen en herleiden op y:
Gegeven $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ dus $y = \ln(\sqrt{x})$ dus inverse als $x = \ln(\sqrt{y})$ [1p]
$x = \ln(\sqrt{y}) = \ln(y^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(y)$ dus $2x = \ln(y)$ [1p] dus $y = e^{2x}$
Conclusie: $f^{inv}(x) = e^{2x}$ [1p]
Opmerking: bij dit type opgave kan je beter een tussenstap te veel dan te weinig hebben.
Opmerking: de gegeven inverse kan bruikbaar zijn bij de volgende opgave.

derde methode m.b.v. $f(f^{inv}(x)) = x$:
Gegeven $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ te bewijzen $f^{inv}(x) = e^{2x}$
$f(f^{inv}(x)) = \ln(\sqrt{f^{inv}(x)}) = \ln(\sqrt{e^{2x}}) = \ln\left((e^{2x})^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(e^x) = x$ [2p] dus $f^{inv}(x) = e^{2x}$ [1p]

4p **13** *Bereken in drie decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: vermenigvuldigen ten opzichte van x-as dus f^{inv} vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$.
Gevraagde lengte berekenen met g(x) – f(x). Top dus afgeleide = 0 hoeft hier niet gebruikt te worden, want gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f^{inv}(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ [1p] en $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
Formule voor de afstand $= g(x) - f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$ [1p]
$y_1 = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$ en Calc Min levert $y = 1{,}5117...$ [1p]
voor $x = 0{,}28...$



Conclusie: gevraagde minimale lengte is $y = 1{,}512$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

4p **14** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: noteer de voorwaarde(n) voor een perforatie.

Perforatie: teller = 0 én noemer = 0, dus $\ln(\sqrt{x}) = 0$ én $\ln(x) = 0$, dus
$\ln(x) = 0$ dus $x = e^0 = 1$
$\ln(\sqrt{x}) = 0$ dus $\sqrt{x} = e^0 = 1$ dus $x = 1$ [1p]

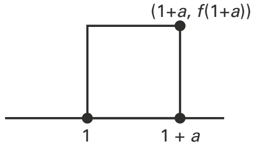
Gevraagd wordt $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^{\frac{1}{2}})}{\ln(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{2}$ [2p]

Conclusie: perforatie is $(1, \frac{1}{2})$ [1p]
Opmerking: h(x) is een constante functie y = 0,5 met een perforatie voor x = 1.

Vierkant onder grafiek

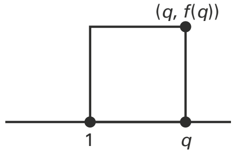
4p **15** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode neem als lengte van de zijde a:
Analyse: vierkant, dus de lengten van de horizontale zijde en verticale zijde zijn gelijk, zeg a. Maak een vergelijking.



Lengte horizontale zijde is a.
x-coördinaat hoekpunt rechtsonder is dan $1 + a$ en de lengte verticale zijde is $f(1 + a) = \frac{1}{1 + a}$ [1p]
Vierkant dus moet gelden $a = \frac{1}{1 + a}$ [1p]
Dus $a(1 + a) = 1$ dus $a^2 + a - 1 = 0$ dus $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1}$
$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

Conclusie: a is een positief getal, dus de lengte van de zijde is $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

tweede methode neem als x-coördinaat van het hoekpunt rechtsonder q:
Analyse: vierkant, dus de lengten van de horizontale zijde en verticale zijde zijn gelijk.
Noem x-coördinaat hoekpunt rechtsonder q. Maak een vergelijking.



Hoekpunt rechtsonder: $x = q$. Lengte verticale zijde is dan

$f(q) = \frac{1}{q}$ [1p]

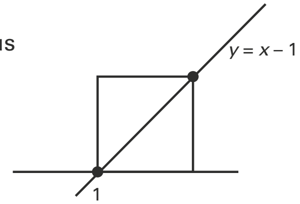
Lengte horizontale zijde is $q - 1$.
Vierkant dus moet gelden $q - 1 = \frac{1}{q}$ [1p]

Dus $q(q-1) = 1$ dus $q^2 - q - 1 = 0$ dus $q = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

q is een positief getal, dus $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Conclusie: de lengte van de zijde is $q - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

derde methode door gebruik te maken van de vergelijking van de diagonaal:
De diagonaal van het vierkant is de lijn $y = x - 1$ [1p]
Het snijpunt rechtsboven is het snijpunt van $y = x - 1$ en de grafiek van f.



Er geldt: $x - 1 = \frac{1}{x}$ [1p] dus $x(x-1) = 1$ dus $x^2 - x - 1 = 0$ dus

$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

x is een positief getal, dus $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Conclusie: de lengte van de zijde is $x - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ [1p]

Twee vierkanten op een kwartcirkel

5p **16** *Bereken, rond af op twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
eerste methode bereken m.b.v. de coördinaten de lengte van de zijden van het vierkant:
Analyse: de vierkanten ADEC en BCFG worden genoemd, dus bereken de lengten AC en BC en daarmee de oppervlakten van de twee vierkanten.

Lengte AC: $A(1, 0)$ en $C(\cos(t), \sin(t))$ levert de lengte van AC is

$|AC| = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2}$

De oppervlakte van vierkant $ADEC$ is dan $AC^2 = (1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2$ [1p]

Lengte BC: $B(0, 1)$ en $C(\cos(t), \sin(t))$ levert de lengte van BC is

$|BC| = \sqrt{(1 - \sin(t))^2 + (\cos(t))^2}$ [1p]

De oppervlakte van vierkant $BCFG$ is dan $BC^2 = (1 - \sin(t))^2 + (\cos(t))^2$

De oppervlakte van vierkant $ADEC$ is twee keer zo groot als de oppervlakte van vierkant $BCFG$,

dus moet gelden $(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 2 \cdot ((1 - \sin(t))^2 + (\cos(t))^2)$ [1p]

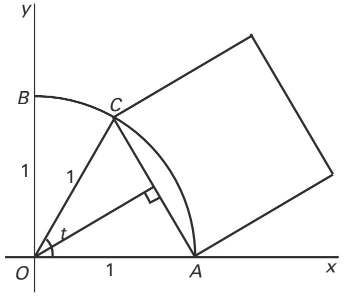
Deze vergelijking oplossen met behulp van

$y_1 = (1 - \cos(x))^2 + (\sin(x))^2$ en $y_2 = 2 \cdot ((1 - \sin(x))^2 + (\cos(x))^2)$ en Calc Intersect [1p]

levert $x \approx 0{,}93$

Conclusie: $t \approx 0{,}93$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

tweede methode bereken de lengte van de zijden m.b.v. de gelijkzijdige driehoeken OAC en OBC en de hoogtelijn.
Analyse: de vierkanten ADEC en BCFG worden genoemd, dus bereken de lengten AC en BC en daarmee de oppervlakten van de twee vierkanten. Teken in driehoek OAC de hoogtelijn vanuit O.
In de rechthoekige driehoek die nu ontstaat geldt:



$\sin(\frac{1}{2}\angle AOC) = \sin(\frac{1}{2}t) = \frac{\frac{1}{2}AC}{OC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{1} = \frac{1}{2}AC$ dus

$AC = 2\sin(\frac{1}{2}t)$ [1p]

De oppervlakte van vierkant $ADEC$ is dan

$AC^2 = (2\sin(\frac{1}{2}t))^2$

Teken in driehoek OBC de hoogtelijn vanuit O.
In de rechthoekige driehoek die nu ontstaat geldt:

$\sin(\frac{1}{2}\angle BOC) = \sin(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - t)) = \frac{\frac{1}{2}BC}{OC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{1} = \frac{1}{2}BC$ dus $BC = 2\sin(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - t))$ [1p]

De oppervlakte van vierkant $BCFG$ is dan $BC^2 = (2\sin(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - t)))^2$

De oppervlakte van vierkant $ADEC$ is twee keer zo groot als de oppervlakte van vierkant $BCFG$,

dus moet gelden $(2\sin(\frac{1}{2}t))^2 = 2 \cdot (2\sin(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - t)))^2$ [1p]

Deze vergelijking oplossen met behulp van

$y_1 = (2\sin(\frac{1}{2}x))^2$ en $y_2 = 2 \cdot (2\sin(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)))^2$ en Calc Intersect [1p] levert $x \approx 0{,}93$

Conclusie: $t \approx 0{,}93$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

derde methode bereken de lengte van de zijden m.b.v. de cosinusregel:
Analyse: de vierkanten ADEC en BCFG worden genoemd, dus bereken de lengten AC en BC en daarmee de oppervlakten van de twee vierkanten.

In driehoek OAC geldt: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos(\angle AOC) =$

$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(t) = 2 - 2\cos(t)$ [1p]

In driehoek OBC geldt: $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos(\angle BOC) =$

$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi - t) = 2 - 2\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ [1p]

Oppervlakte vierkant $ADEC$ is AC^2 en oppervlakte vierkant $BCFG$ is BC^2
De oppervlakte van vierkant $ADEC$ is twee keer zo groot als de oppervlakte van vierkant $BCFG$,
dus moet gelden $2 - 2\cos(t) = 2 \cdot (2 - 2\cos(\frac{1}{2}\pi - t))$ [1p]
Deze vergelijking oplossen met behulp van

$y_1 = 2 - 2\cos(x)$ en $y_2 = 2 \cdot (2 - 2\cos(\frac{1}{2}\pi - x))$ en Calc Intersect [1p] levert $x \approx 0{,}93$

Conclusie: $t \approx 0{,}93$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

4p **17** *Analyse: ga na welke vectoren bekend zijn. De punten A, B en C zijn bekend, dus maak gebruik van de vectoren $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{BC}$ (en $\overrightarrow{OA}$ enz.) Druk $\overrightarrow{OF}$ uit in deze vectoren. $\overrightarrow{CF}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{BC}$.*

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}$ [1p]

Omdat $C(\cos(t), \sin(t))$ geldt $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

Omdat $B(0, 1)$ en $C(\cos(t), \sin(t))$ geldt

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 - \cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix}$ [1p]

$\overrightarrow{CF}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{CB}$ (rotatie over –90°) dus geldt $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ [1p]

Conclusie: $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$ [1p]

©ThiemeMeulenhoff

Examen 2018-II

Loodrecht in de perforatie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{-2 + 2\sqrt{x + 1}}{x}$.

Ook is gegeven de functie h door $h(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x + 1}}$.

Voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

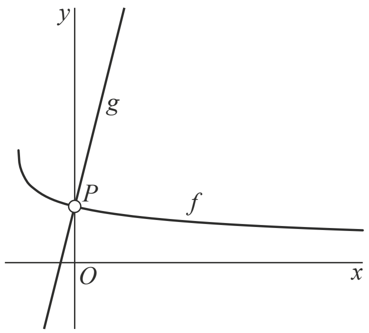
3p **1** Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

Verder is de functie g gegeven door $g(x) = \dfrac{4x^2 + x}{x}$.

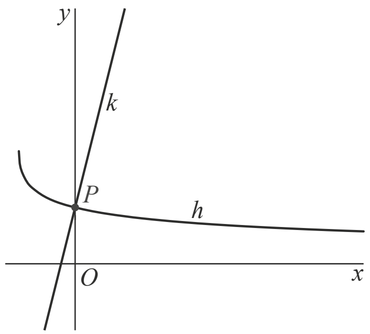
Er is een lijn k die voor $x \neq 0$ samenvalt met de grafiek van g.

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.
Punt $P(0, 1)$ is de perforatie van beide grafieken.
In figuur 2 zijn de grafiek van h en lijn k weergegeven en ook hun snijpunt P.

figuur 1



figuur 2



Er geldt:
de grafieken van f en g staan in hun perforatie P loodrecht op elkaar als de grafiek van h en lijn k in hun snijpunt P loodrecht op elkaar staan.

5p **2** Bewijs dat de grafieken van f en g in hun perforatie P loodrecht op elkaar staan.

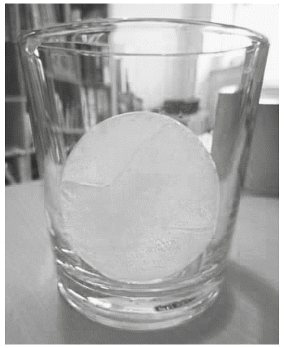
IJsbol

De snelheid waarmee een ijsklontje smelt, hangt onder andere af van de verhouding tussen de oppervlakte A in cm^2 en het volume V in cm^3 van het ijsklontje. Deze verhouding wordt uitgedrukt in het quotiënt $\frac{A}{V}$.

Voorbeeld: bij een kubusvormig ijsklontje met ribben van 3 cm is dit quotiënt gelijk aan $\frac{52}{27} = 2$.

Er zijn ook bolvormige ijsklontjes ofwel **ijsbollen**. Zie de foto.

foto



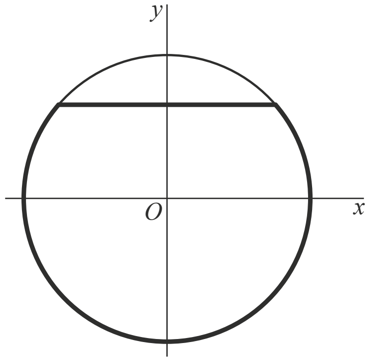
Voor een bol met straal r gelden voor A en V de formules $A = 4\pi r^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bij een ijsbol met hetzelfde volume als het genoemde kubusvormige ijsklontje met ribben van 3 cm is het quotiënt $\frac{A}{V}$ kleiner dan 2.

4p **3** Bereken algebraïsch dit quotiënt bij deze ijsbol. Rond je eindantwoord af op 2 decimalen.

Een ijsbol wordt in een glas water gedaan, waarna de ijsbol in het water drijft. Op het moment dat de ijsbol in het water wordt gedaan, heeft deze een straal van 1,5 cm.
Er geldt dat 92% van het volume van de ijsbol onder water zit en 8% erboven.
Het volume van de ijsbol is dan
$\frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 \approx 14{,}137$ cm^3.
Het deel van de ijsbol onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 2{,}25$ om de y-as.
Zie de figuur.

figuur



5p **4** Bereken hoeveel cm de ijsbol boven het water uitsteekt op het moment dat hij in het water wordt gedaan. Rond je eindantwoord af op 2 decimalen.

In een wiskundig model van het smelten van een ijsbol wordt ervan uitgegaan dat de ijsbol tijdens het smelten bolvormig blijft. De straal van de ijsbol is afhankelijk van de tijd. De straal van de ijsbol op tijdstip t is $r(t)$, met t in minuten.

Het volume van de ijsbol op tijdstip t is dan $V(t) = \frac{4}{3}\pi\,(r(t))^3$. In het model wordt er verder van uitgegaan dat de formule van $r(t)$ lineair is.

Een ijsbol heeft op tijdstip $t = 0$ een straal van 1,5 cm. Op tijdstip $t = 10$ is het volume van deze ijsbol gehalveerd. Vanaf een bepaald tijdstip is er geen ijs meer aanwezig.

5p **5** Bereken vanaf welk geheel aantal minuten er voor het eerst geen ijs meer aanwezig is.

Constante verhouding

Voor $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x - x\ln(ax)$

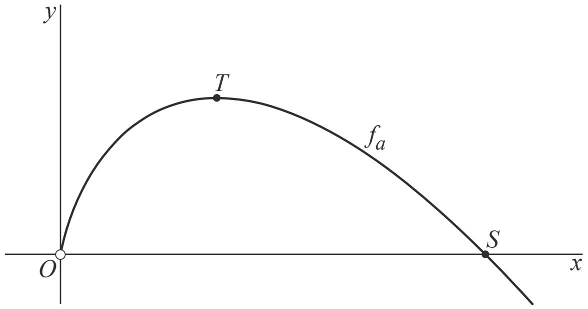
4p **6** Bewijs dat voor elke toegestane waarde van x geldt:

$$\frac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x)$$

Voor elke positieve waarde van a geldt:
- de grafiek van f_a snijdt de x-as in precies één punt S (met x-coördinaat x_S);
- de grafiek van f_a heeft één top T (met x-coördinaat x_T).

In de figuur zijn voor een waarde van a de grafiek van f_a en de punten S en T weergegeven.

figuur

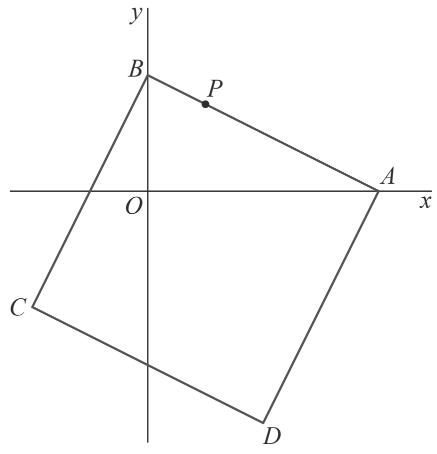


7p **7** Bewijs dat voor elke positieve waarde van a de verhouding $\frac{x_S}{x_T}$ constant is.

Gekanteld vierkant

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met hoekpunten $A(8, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-4, -4)$ en $D(4, -8)$. Op zijde AB ligt het punt $P(2, 3)$. Zie figuur 1.

figuur 1



De punten B, C en P liggen op één cirkel.

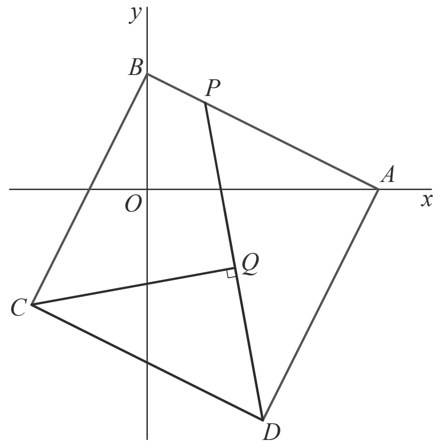
5p **8** Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Over lijnstuk DP beweegt (van D naar P) een punt Q.

Er is een positie van Q waarvoor lijnstuk CQ loodrecht staat op lijnstuk DP. Zie figuur 2.

5p **9** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

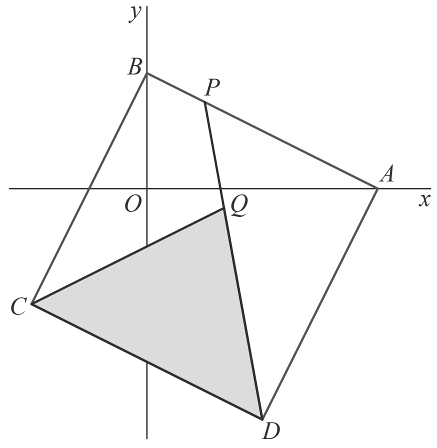
figuur 2



In figuur 3 is driehoek CDQ grijs gemaakt. Er is een positie van Q waarbij de oppervlakte van driehoek CDQ een derde deel is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.

5p **10** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

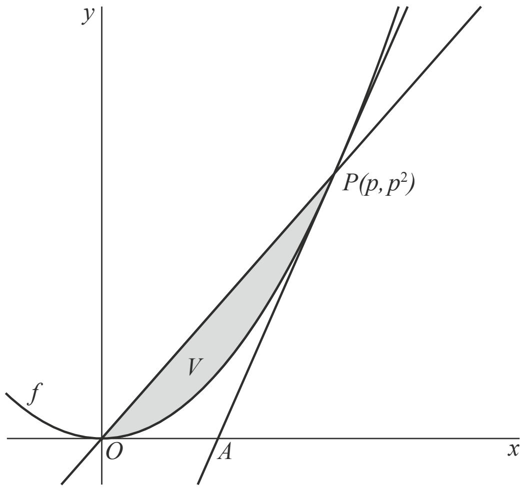
figuur 3



Anderhalf keer zo groot

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$.
De raaklijn aan de grafiek van f in een punt $P(p, p^2)$ met $p > 0$ snijdt de x-as in een punt A.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn OP.
Zie de figuur.

figuur



8p **11** Bewijs dat de oppervlakte van driehoek OAP anderhalf keer zo groot is als de oppervlakte van V.

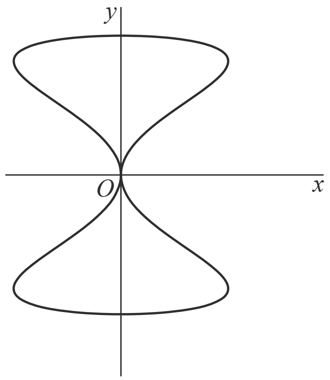
Een baan

Een punt beweegt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

De baan van het bewegende punt is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ bevindt het bewegende punt zich in *O*. Deze situatie laten we in de gehele opgave verder buiten beschouwing.

P_t is de positie van het bewegende punt op tijdstip *t*.

Er geldt: de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is voor elke in deze situatie mogelijke waarde van *a* verticaal.

3p **12** Bewijs dat die lijn inderdaad verticaal is.

Er zijn meerdere tijdstippen waarvoor geldt dat de afstand van P_t tot de *x*-as twee keer zo groot is als de afstand van P_t tot de *y*-as.

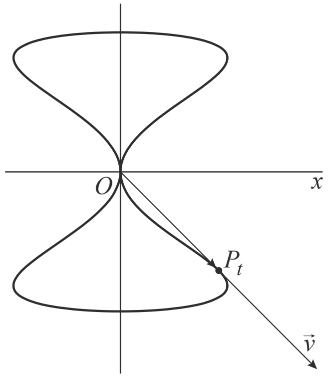
5p **13** Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit het geval is.

Voor iedere waarde van *t* kunnen de snelheidsvector $\vec{v}$ vanuit punt P_t en de vector $\overrightarrow{OP_t}$ worden getekend.

In figuur 2 zijn punt P_t, vector $\overrightarrow{OP_t}$ en vector $\vec{v}$ getekend voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

5p **14** Bewijs dat voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$

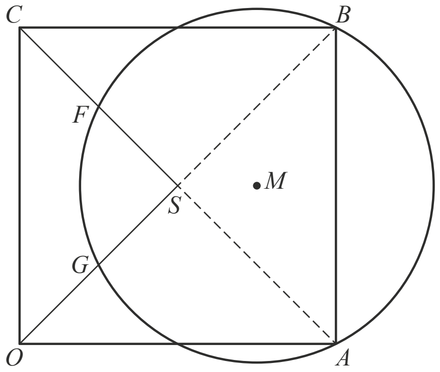
figuur 2



Buiten een vierkant

Gegeven is het vierkant *OABC* met *O*(0, 0), *A*(4, 0) en *C*(0, 4).
Het snijpunt van *OB* en *AC* is het punt *S*.
Het punt *M*(3, 2) is het middelpunt van een cirkel door *A* en *B*.
De punten *F* en *G* zijn de snijpunten van deze cirkel met *CS* respectievelijk *OS*.
Zie figuur 1.

figuur 1

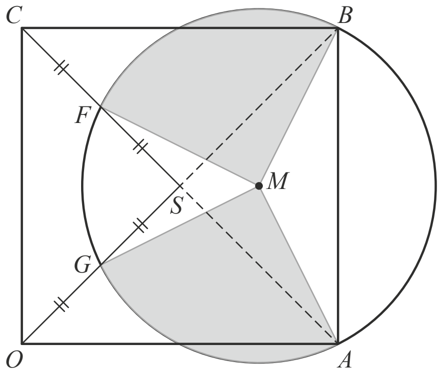


Er geldt: *F* is het midden van *CS*.

5p **15** Bewijs dat *F* inderdaad het midden is van *CS*.

Verder geldt: *G* is het midden van *OS*.
In figuur 2 zijn de cirkelsectoren *BMF* en *GMA* grijs gemaakt.

figuur 2



De oppervlakte van deze twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

3p **16** Bewijs dit.

Hints bij examen 2018-II

1 Twee formules zijn gegeven, maak daar gebruik van.

2 Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 0$ van h en k met h' en k'.

3 Met $V = 27$ is r te berekenen.

4 Omwentelingslichaam om y-as, gebruik bijvoorbeeld formule Inhoud $= \pi \int_{-1,5}^{h} (x^2)\,dy$

5 Op $t = 0$ zijn de inhoud en de straal bekend. Op $t = 10$ is de inhoud gehalveerd, de waarde van r op $t = 10$ is hiermee te berekenen.

6 Noteer $f_1(x)$, $f_a(x)$ en $f_{\frac{1}{a}}(x)$. Maak gebruik van de rekenregels voor logaritmen.

7 Bepaal x_S met behulp van $f_a(x) = 0$ en x_T met behulp van $f_a'(x) = 0$.

8 Hoek CBP is recht, dus middelpunt cirkel ligt halverwege lijnstuk CP (Thales) of gebruik het snijpunt van de middelloodlijnen.

9 Loodrecht, dus $rc_{PD} \cdot rc_{CQ} = -1$

10 Oppervlakte driehoek wordt berekend met een basis en een (hoogte-)lijn die daar loodrecht op staat. Neem als basis CD en de hoogtelijn vanuit Q: zoek de verhouding DQ staat tot DP.

11 Start met raaklijn in punt P, dus richting in punt P bepalen (afgeleide $f'(p)$) en vergelijking raaklijn opstellen ($y = ax + b$).

12 Als de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ verticaal is, dan zijn de x-coördinaten van de twee punten gelijk.

13 Afstand P_t tot de x-as is $y(t)$, en afstand P_t tot de y-as is x. Er moet dus gelden $y(t) = \pm 2 \cdot x(t)$

14 Er moet gelden $\vec{OP} = \vec{v}$, dus bepaal $\vec{OP}$ en $\vec{v}$ voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

15 Start met de vergelijking van de cirkel en de vergelijking van lijn CS (is lijn AC).

16 Als de twee sectoren samen de helft zijn, dan zal elk van de sectoren (symmetrie overwegingen) een kwart zijn. Dus hoek FMB (of hoek GMA) zal 90° zijn.

Uitwerkingen bij examen 2018-II

Loodrecht in de perforatie

3p **1** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: twee formules zijn gegeven, daar kan gebruik van gemaakt worden.

$f(x) = \dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x}$ en $h(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}$ en $f(x) = h(x)$ dus $\dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x} = \dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}$ voor $x \neq 0$

$(-2+2\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1}) = 2x$ [1p]

$-2-2\cdot\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}\cdot 1+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1} = 2x$ [1p]

$-2+2(x+1) = 2x$

$-2+2x+2 = 2x$ klopt [1p]

Conclusie: $f(x) = h(x)$ voor $x \neq 0$

5p **2** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: f en g staan (in hun perforatie P(0, 1)) loodrecht op elkaar als h en k in P(0, 1) loodrecht op elkaar staan. Bepaal richtingen van h en k, (dus h′ en k′) en ga na of het product van deze richtingen –1 is.
Gebruik het resultaat van opgave 1, dus voor x ≠ 0 geldt f(x) = h(x).

$h(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}$ dus $h'(x) = \dfrac{0\cdot(1+\sqrt{x+1}) - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{x+1})^2} = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{(1+\sqrt{x+1})^2}$ [2p]

Dus de richting van de grafiek van h in $P(0, 1)$ is $h'(0) = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{0+1}}}{(1+\sqrt{0+1})^2} = \dfrac{-1}{4}$ [1p]

$g(x) = \dfrac{4x^2+x}{x}$ en $k(x) = 4x+1$ dus voor $x \neq 0$ geldt $g(x) = k(x)$ en $k'(x) = 4$ [1p]

Dus de richting van de grafiek van k in $P(0, 1)$ is $k'(0) = 4$
Het product $h'(0)\cdot k'(0) = -1$, dus de grafieken van h en k staan loodrecht op elkaar in $P(0, 1)$. [1p]

Conclusie: de grafieken van f en g staan loodrecht op elkaar in hun perforatie $P(0, 1)$.

IJsbol

4p **3** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische deel van grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode door eerst A te berekenen met behulp van V = 27:

Analyse: gegeven zijn $A = 4\pi r^2$ *en* $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ *(V = 27 is gegeven). Hiermee is r te berekenen.*
Met deze r is A te berekenen. Met V en A is het quotiënt te berekenen.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ [1p] hieruit volgt $r^3 = 27 : \left(\frac{4}{3}\pi\right) = 6{,}44\ldots$ dus $r = 1{,}86\ldots$ [1p]

Dus $A = 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 1{,}86\ldots^2$ [1p]

Het quotiënt is $\dfrac{A}{V} = \dfrac{4\pi\cdot 1{,}86\ldots^2}{27}$

Conclusie: het gevraagde quotiënt is 1,61 [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

tweede methode door eerst $\frac{A}{V}$ uit te drukken in r:
Analyse: gegeven zijn $A = 4\pi r^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ (V = 27 is gegeven). Eerst het quotiënt $\frac{A}{V}$ berekenen.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ [1p] dus $r = 1{,}86...$ [1p]

$A = 4\pi r^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Dus $\frac{A}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}$ [1p]

dus het gevraagde quotiënt is $\frac{A}{V} = \frac{3}{r} = \frac{3}{1{,}86...}$

Conclusie: het gevraagde quotiënt is 1,61 [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

5p **4** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: omwentelingslichaam om de y-as dus gebruik formule Inhoud = $\pi \int_{-1,5}^{h} (x^2)\, dy$.

Percentage 92% onder water is gegeven dus inhoud ijsbol onder water is te berekenen.
De straal van de bol is 1,5.
eerste methode met behulp van de halve bol boven de x-as:
Inhoud ijs onder water is $0{,}92 \cdot 14{,}137 = 13{,}006$ en inhoud halve ijsbol is 7,069 (onderste helft) dus inhoud deel boven de x-as is 5,937.
Omdat geldt $x^2 + y^2 = 2{,}25$ geldt ook $x^2 = 2{,}25 - y^2$
Neem (0, h) is snijpunt van de y-as met het wateroppervlak.

Inhoud $= \pi \int_0^h (2{,}25 - y^2)\, dy = \pi \left[2{,}25y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^h = \pi\,(2{,}25h - \frac{1}{3}h^3)$ [1p]

Dus $\pi\,(2{,}25h - \frac{1}{3}h^3) = 5{,}937...$ [1p]

$y_1 = \pi\,(2{,}25x - \frac{1}{3}x^3)$

$y_2 = 5{,}937...$

Calculate Intersect levert $x = h \approx 0{,}98$ [2p]
Conclusie: gedeelte boven water is $r - h = 1{,}50 - 0{,}98 = 0{,}52$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

tweede methode met behulp van gehele bol:
Inhoud ijs onder water is $0{,}92 \cdot 14{,}137 = 13{,}006$
Omdat geldt $x^2 + y^2 = 2{,}25$ geldt ook $x^2 = 2{,}25 - y^2$
Neem (0, h) is snijpunt van de y-as met het wateroppervlakte en (0; –1,5) is snijpunt van de cirkel met de y-as.

Dus Inhoud $= \pi \int_{-1,5}^{h} (x^2)\, dy = \pi \int_{-1,5}^{h} (2{,}25 - y^2)\, dy = 13{,}006$ [1p]

Inhoud $= \pi \left[2{,}25y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1,5}^{h} = \pi\,(2{,}25h - \frac{1}{3}h^3 - (2{,}25 \cdot -1{,}5 - \frac{1}{3} \cdot (-1{,}5)^3))$

$= \pi\,(2{,}25h - \frac{1}{3}h^3 + 2{,}25) = 13{,}006$ [1p]

$y_1 = \pi\,(2{,}25x - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}25)$

$y_2 = 13{,}006$

Calculate Intersect levert $x = h \approx 0{,}98$ [2p]
Conclusie: gedeelte boven water is $r - h = 1{,}50 - 0{,}98 = 0{,}52$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

derde methode met behulp van het deel van de bol boven het wateroppervlak:
Inhoud ijs boven water is $0{,}08 \cdot 14{,}137 = 1{,}131$
Omdat geldt $x^2 + y^2 = 2{,}25$ geldt ook $x^2 = 2{,}25 - y^2$

Neem (0, h) is snijpunt van de y-as met het wateroppervlakte en (0; 1,5) is snijpunt van de cirkel met de y-as.

Dus Inhoud $= \pi \int_h^{1,5} (x^2)\, dy = \pi \int_h^{1,5} (2{,}25 - y^2)\, dy = 1{,}131$ [1p]

Inhoud $= \pi \left[2{,}25y - \frac{1}{3}y^3\right]_h^{1,5} = \pi\,(2{,}25 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 1{,}5^3 - (2{,}25h - \frac{1}{3}h^3))$

$= \pi\,(2{,}25 - 2{,}25h + \frac{1}{3}h^3) = 1{,}131$ [1p]

$y_1 = \pi\,(2{,}25 - 2{,}25x + \frac{1}{3}x^3)$

$y_2 = 1{,}131$

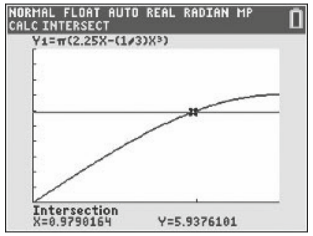
Calculate Intersect levert $x = h \approx 0{,}98$ [2p]
Conclusie: gedeelte boven water is $r - h = 1{,}50 - 0{,}98 = 0{,}52$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

vierde methode met behulp van deel van de bol boven het wateroppervlak en de GR:
Inhoud ijs boven water is $0{,}08 \cdot 14{,}137 = 1{,}131$
Omdat geldt $x^2 + y^2 = 2{,}25$ geldt ook $x^2 = 2{,}25 - y^2$
Neem (0, h) is snijpunt van de y-as met het wateroppervlakte en (0; 1,5) is snijpunt van de cirkel met de y-as.

Dus Inhoud $= \pi \int_h^{1,5} (x^2)\, dy = \pi \int_h^{1,5} (2{,}25 - y^2)\, dy = 1{,}131$ [2p]

$y_1 = \pi \int_x^{1,5} (2{,}25 - x^2)\, dx$

$y_2 = 1{,}131$
Calculate Intersect levert $x = h \approx 0{,}98$ [2p]
Conclusie: gedeelte boven water is
$r - h = 1{,}50 - 0{,}98 = 0{,}52$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.



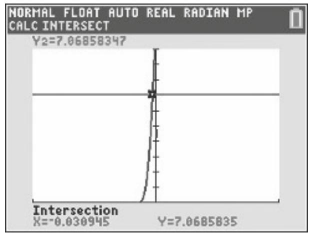
5p **5** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
eerste methode door eerst de afname per minuut te berekenen:
Analyse: op t = 10 is de inhoud gehalveerd. Bijbehorende r is te berekenen.

Inhoud op $t = 0$ is 14,137 cm^3. Als de inhoud gehalveerd is geldt $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 7{,}068...$
dus $r = 1{,}190....$ [1p]
De straal r neemt (lineair) met 1,50 – 1,190... = 0,309... af in 10 minuten. [1p]
Dus afname van straal r per minuut is 0,0309... [1p]
Voor de ijsbol met straal van 1,5 cm. is dus $\frac{1{,}5}{0{,}0309...} = 48{,}47...$ minuten nodig. [1p]
Conclusie: na 49 (minuten) is er voor het eerst geen ijs meer. [1p]

tweede methode door een formule r = at + b op te stellen voor straal r op tijdstip t:
Analyse: formule r(t) is lineair en r(0) = 1,5 dus r(t) = at + 1,5. Met behulp van r(10) is a te berekenen.
Inhoud op $t = 0$ is 14,137 cm^3.
Als de inhoud gehalveerd is geldt $t = 10$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 7{,}068...$ dus $r(10) = 1{,}190....$ [1p]
Dus 1,190... = 10a + 1,5 dus a = –0,0309.... [1p]
Dus $r(t) = -0{,}0309... \cdot t + 1{,}5$.
Als de ijsbol geheel gesmolten is, geldt $-0{,}0309... \cdot t + 1{,}5 = 0$ [2p]

Conclusie: na 49 (minuten) is er voor het eerst geen ijs meer. [1p]

derde methode met de GR:
Analyse: formule r(t) is lineair en op t = 0 geldt r = 1,5, dus r(t) = at + 1,5. Met behulp van V(10) is a te berekenen.
$V(0) = 14{,}137...$ dus $V(10) = 7{,}068...$ [1p]



Omdat $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ geldt op tijdstip $t = 10$ de vergelijking
$\frac{4}{3}\pi\,(a \cdot 10 + 1{,}5)^3 = 7{,}068...$ [2p]
$y_1 = \frac{4}{3}\pi\,(x \cdot 10 + 1{,}5)^3$
$y_2 = 7{,}068...$
Calculate Intersect levert $a = -0{,}0309...$. [1p]
Dus $r(t) = -0{,}0309... \cdot t + 1{,}5$. Als de ijsbol geheel gesmolten is, geldt $-0{,}0309... \cdot t + 1{,}5 = 0$
Conclusie: na 49 (minuten) is er voor het eerst geen ijs meer. [1p]

Constante verhouding

4p **6** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: noteer $f_1(x)$, $f_a(x)$ en $f_{1/a}(x)$. Gebruik de rekenregels voor logaritmen.
eerste methode:

$f_1(x) = x - x\ln(x)$, $f_a(x) = x - x\ln(ax)$ en $f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln\left(\frac{1}{a}x\right)$

$f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x) = (x - x\ln(ax)) + (x - x\ln(\frac{1}{a}x)) = 2x - x\left(\ln(ax) + \ln(\frac{1}{a}x)\right) =$ [1p]

$2x - x \cdot \ln(ax \cdot \frac{1}{a}x) = 2x - x \cdot \ln(x^2) = 2x - 2x\ln(x)$ dus [2p]

$\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - 2x\ln(x)}{2} = x - x\ln(x)$ [1p]

Conclusie: $\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x)$

tweede methode:
$f_1(x) = x - x\ln(x)$
$f_a(x) = x - x\ln(ax) = x - (x\ln(a) + x\ln(x)) = x - x\ln(a) - x\ln(x)$ [1p]
$f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln(\frac{1}{a}x) = x - (x\ln(\frac{1}{a}) + x\ln(x)) = x + x\ln(a) - x\ln(x)$ [2p]

$\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - 2x\ln(x)}{2} = x - x\ln(x)$ [1p]

Conclusie: $\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x)$

7p **7** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: bepaal x_S met behulp van $f_a(x) = 0$ en x_T met behulp van $f_a'(x) = 0$.
Bepaal x_S dus $x - x\ln(ax) = 0$ dus $x(1 - \ln(ax)) = 0$ dus $\ln(ax) = 1$ [1p] dus $ax = e$
dus $x_S = \frac{e}{a}$ [1p]
$f(x) = x - (x\ln(ax)) \Rightarrow f'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln(ax) + x \cdot \frac{a}{ax}\right) = 1 - (\ln(ax) + 1) = -\ln(ax)$ [2p]
Bepaal x_T dus $f'(x) = \ln(ax) = 0$ dus $ax = 1$ dus $x_T = \frac{1}{a}$ [2p]
Conclusie: $\dfrac{x_S}{x_T} = \dfrac{\frac{e}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{e}{a} \cdot \frac{a}{1} = e$ dus constant. [1p]
Opmerking: let op gebruik productregel én kettingregel bij bepalen van x_T.

Gekanteld vierkant

5p **8** *Stel op, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode gebruik Thales en bereken de straal:
Analyse: hoek CBP is recht, dus middelpunt cirkel ligt halverwege lijnstuk CP (Thales).
Omdat $\angle CBP = 90°$ geldt middelpunt cirkel M ligt halverwege lijnstuk CP (Thales) [1p]

$C(-4, -4)$ en $P(2, 3)$ dus $M(-1, -\frac{1}{2})$ [1p]

Omdat $M(-1, -\frac{1}{2})$ geldt $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = r^2$ [1p]

$B(0, 4)$ en $M(-1, -\frac{1}{2})$ dus geldt $r = \sqrt{1^2 + (4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{21\frac{1}{4}}$ [1p]

Conclusie: vergelijking cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ [1p]

tweede methode gebruik Thales en vul een punt in:
Analyse: hoek CBP is recht, dus middelpunt cirkel ligt halverwege lijnstuk CP (Thales).
Omdat $\angle CBP = 90°$ geldt middelpunt cirkel M ligt halverwege lijnstuk CP (Thales) [1p]

omdat $C(-4, -4)$ en $P(2, 3)$ is $M(-1, -\frac{1}{2})$ [1p]

Omdat $M(-1, -\frac{1}{2})$ geldt $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = r^2$ [1p]

Invullen van de coördinaten van B (of C of P) levert $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ [1p]

Conclusie: vergelijking cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ [1p]

derde methode met behulp van het snijpunt van de middelloodlijnen:
Analyse: het middelpunt M van de cirkel ligt op het snijpunt van de middelloodlijnen van CB en BP (en CP).
Middelloodlijn van CB:
$C(-4, -4)$ en $B(0, 4)$ dus $r.c._{CB} = 2$ en midden van CB is $(-2, 0)$
dus middelloodlijn van CB is $y = -\frac{1}{2}x - 1$ [1p]
Middelloodlijn van BP:
$P(2, 3)$ en $B(0, 4)$ dus $r.c._{PB} = -\frac{1}{2}$ en midden van PB is $(1, 3\frac{1}{2})$
dus middelloodlijn van BP is $y = 2x + 1\frac{1}{2}$ [1p]
De twee middelloodlijnen snijden, dus $-\frac{1}{2}x - 1 = 2x + 1\frac{1}{2}$ levert $x = -1$, dus $M(-1, -\frac{1}{2})$ [1p]
Omdat $M(-1, -\frac{1}{2})$ geldt $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = r^2$
Omdat $B(0, 4)$ en $M(-1, -\frac{1}{2})$ geldt $r = \sqrt{1^2 + (4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{21\frac{1}{4}}$ [1p]
Conclusie: vergelijking cirkel is $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ [1p]

5p **9** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met behulp van de vergelijkingen van PD en CQ:
Analyse: loodrecht dus $rc_{PD} \cdot rc_{CQ} = -1$
$D(4, -8)$ en $P(2, 3)$ dus $rc_{PD} = \frac{-11}{2}$ dus $rc_{CQ} = \frac{2}{11}$
PD: $y = \frac{-11}{2}x + b$ en $P(2, 3)$ invullen levert $y = \frac{-11}{2}x + 14$ [1p]
CQ: $y = \frac{2}{11}x + b$ en $C(-4, -4)$ invullen levert $y = \frac{2}{11}x + \frac{-36}{11}$ [1p]

Coördinaten van Q berekenen door $\frac{-11}{2}x + 14 = \frac{2}{11}x + \frac{-36}{11}$ op te lossen. [1p]

Dit levert $x = 3\frac{1}{25}$ [1p]

Conclusie: $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ [1p]

tweede methode met behulp lijn PD en CQ in de vorm y = a(x – b) +c:
Analyse: loodrecht dus $rc_{PD} \cdot rc_{CQ} = -1$

$D(4, -8)$ en $P(2, 3)$ dus $rc_{PD} = \frac{-11}{2}$ dus $rc_{CQ} = \frac{2}{11}$

PD: $y = \frac{-11}{2}x + b$ en $P(2, 3)$ invullen levert $y = \frac{-11}{2}(x-2) + 3$ [1p]

CQ: $y = \frac{2}{11}x + b$ en $C(-4, -4)$ dus invullen levert $y = \frac{2}{11}(x+4) - 4$ [1p]

Coördinaten van Q berekenen door $\frac{-11}{2}(x-2) + 3 = \frac{2}{11}(x+4) - 4$ op te lossen. [1p]

Dit levert $x = 3\frac{1}{25}$ [1p]

Conclusie: $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ [1p]

derde methode met behulp van snijpunt lijn PD en cirkel:
Analyse: omdat hoek CQP = 90°, ligt Q ook op cirkel door C en P en B. De vergelijking van de cirkel is bekend, zie vorige opgave. Deze cirkel snijden met de lijn door P en D.

Omdat $\angle CQP = 90°$ ligt Q op de cirkel met middellijn CP, dus op cirkel met vergelijking $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ [1p]

$D(4, -8)$ en $P(2, 3)$ dus $rc_{PD} = \frac{-11}{2}$

Lijn door PD: $y = \frac{-11}{2}x + b$ en $P(2, 3)$ invullen levert $y = \frac{-11}{2}x + 14$ [1p]

Substitutie levert $(x+1)^2 + (-5\frac{1}{2}x + 14 + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ [1p]

dus $(x+1)^2 + (-5\frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$

$x^2 + 2x + 1 + 30\frac{1}{4}x^2 - 159\frac{1}{2}x + 210\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$ dus $31\frac{1}{4}x^2 - 157\frac{1}{2}x + 190 = 0$

Oplossen met de *abc*-formule levert $x = 3\frac{1}{25}$ [1p]

Conclusie: $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ [1p]

vierde methode met behulp van de vectorvoorstellingen van de lijn PD en Pythagoras:
Analyse: rechte hoek CQP dus gebruik Pythagoras in driehoek CQP

Vectorvoorstelling PD: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ [1p] dus $Q(2 + 2\lambda, 3 - 11\lambda)$

$C(-4, -4)$ en $P(2, 3)$ dus $PC^2 = 6^2 + 7^2$ [1p]

$PC^2 = CQ^2 + PQ^2$ dus $6^2 + 7^2 = (6 + 2\lambda)^2 + (7 - 2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (-11\lambda)^2$ [1p] dus $\lambda = \frac{13}{25}$ [1p]

($\lambda = 0$ voldoet niet)

Conclusie: $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ [1p]

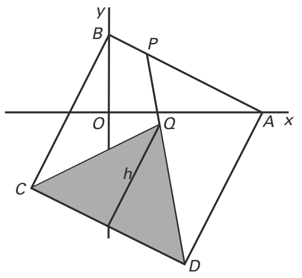
5p **10** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: oppervlakte driehoek wordt berekend met een basis en een (hoogte-)lijn die daar loodrecht op staat.
eerste methode gebruik gelijkvormige driehoeken:

Oppervlakte vierkant = $CD \cdot CB$

Oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \cdot h \cdot CD$ met basis CD en de hoogtelijn h loodrecht op CD [1p]

Er geldt een derde deel van het vierkant $ABCD$ is de oppervlakte van driehoek CDQ dus

$\frac{1}{3} \cdot CD \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot h \cdot CD$ dus $h = \frac{2}{3} \cdot CB$ dus ook $DQ = \frac{2}{3} \cdot DP$ [1p]



Punt Q ligt op de lijn door $D(4, -8)$ en $P(2, 3)$, zodanig dat geldt:

op $\frac{2}{3}$ deel van de x-coördinaten 4 en 2 ligt $x_Q = 4 - 2 \cdot \frac{2}{3}$ [1p]

op $\frac{2}{3}$ deel van de y-coördinaten –8 en 3 ligt $y_Q = -8 + 11 \cdot \frac{2}{3}$ [1p]

Conclusie: $Q(2\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ [1p]

tweede methode met vectoren:

Oppervlakte vierkant = $CD \cdot CB$

Oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \cdot h \cdot CD$ met basis CD en de hoogtelijn h loodrecht op CD [1p]

Er geldt een derde deel van het vierkant $ABCD$ is de oppervlakte van driehoek CDQ dus

$\frac{1}{3} \cdot CD \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot h \cdot CD$ dus $h = \frac{2}{3} \cdot CB$ dus ook $DQ = \frac{2}{3} \cdot DP$ [1p]

$\vec{OQ} = \vec{OD} + \frac{2}{3}\vec{DP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ [2p]

Conclusie: $Q(2\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ [1p]

Anderhalf keer zo groot

8p **11** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: raaklijn, dus richting in punt P bepalen (afgeleide f′(p)) en vergelijking raaklijn opstellen (y = ax + b). Punt A, dus raaklijn snijden met x-as. Oppervlakte V, dus lijn OP opstellen en bereken de integraal en primitieve van f(x). Oppervlakte driehoek OAP berekenen met basis OA en hoogte p^2.
eerste methode:
Raaklijn aan de grafiek in $P(p, p^2)$ *opstellen*

$f(x) = x^2$ dus $f'(x) = 2x$ dus r.c.$_{raaklijn} = f'(p) = 2p$ [1p] dus raaklijn wordt: $y = 2px + b$

$P(p, p^2)$ invullen levert $b = -p^2$ dus $y = 2px - p^2$ [1p]

x-coördinaat van punt A berekenen: dus $2px - p^2 = 0$ dus $x = \frac{1}{2}p$ [1p]

Lijn OP heeft richting $\frac{p^2}{p} = p$ dus vergelijking lijn OP is $y = px$ [1p]

Opp.$_V = \int_0^p (px - x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^p = \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$ [2p]

Opp.$_{OAP} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$ [1p]

Conclusie: Opp.$_{OAP}$ = anderhalf keer Opp.$_V$ (want $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{4}p^3$) [1p]

tweede methode met behulp van driehoek OPP′, met P′ is (p, 0):
Raaklijn aan de grafiek in $P(p, p^2)$ opstellen

$f(x) = x^2$ dus $f'(x) = 2x$ dus r.c.$_{\text{raaklijn}} = f'(p) = 2p$ [1p] dus raaklijn wordt: $y = 2px + b$

$P(p, p^2)$ invullen levert $b = -p^2$ dus $y = 2px - p^2$ [1p]

x-coördinaat van punt A berekenen: dus $2px - p^2 = 0$ dus $x = \frac{1}{2}p$ [1p]

$\text{Opp.}_{\text{onder } f} = \int_0^p (x^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^p = \frac{1}{3}p^3$ [1p]

$\text{Opp.}_V = \text{Opp.}_{\Delta OP'P} - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{2} \cdot p \cdot p^2 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$ [2p]

$\text{Opp.}_{OAP} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$ [1p]

Conclusie: Opp._{OAP} = anderhalf keer Opp._V (want $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{4}p^3$) [1p]

Een baan

3p **12** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met behulp van de x-coördinaten:
Analyse: als de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ verticaal is, dan zijn de x-coördinaten van de twee punten gelijk. Bereken dus de x-coördinaten van de twee punten als $t = a$ en $t = \pi - a$ en werk om met behulp van de gonio-formules (zie de bij dit examen gegeven formules).
Gegeven $x(t) = \cos(t) \cdot \sin(2t)$ dus in dit geval $x(t) = x(a) = \cos(a) \cdot \sin(2a) = \cos(a) \cdot 2\sin(a)\cos(a)$ [1p]
En ook $x(t) = x(\pi - a) = \cos(\pi - a) \cdot \sin(2(\pi - a)) = -\cos(a) \cdot \sin(2\pi - 2a) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a) \cdot 2\sin(a)\cos(a)$ [1p]

Conclusie: $x(a) = x(\pi - a)$ dus de x-coördinaten van de twee punten zijn gelijk. [1p]
Opmerkingen: gebruikt zijn de formules $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ en $\sin(2\pi - 2a) = \sin(-2a) = -\sin(2a)$
Opmerking: bij dit type opgave kan je beter een tussenstap te veel dan te weinig noteren.

tweede methode:
Analyse: als de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ verticaal is, dan zijn de x-coördinaten van de twee punten gelijk. Werk $x(t) = x(\pi - a)$ om tot $x(t) = x(a)$ (zie de bij dit examen gegeven formules).
$x(t) = x(\pi - a) = \cos(\pi - a) \cdot \sin(2(\pi - a))$
$\cos(\pi - a) \cdot \sin(2(\pi - a)) = -\cos(a) \cdot \sin(2\pi - 2a)$ want $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ [1p]
$-\cos(a) \cdot \sin(2\pi - 2a) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a)$ want $\sin(2\pi - 2a) = \sin(-2a) = -\sin(2a)$
$-\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a) \cdot \sin(2a) = x(a)$ [1p]
Conclusie: $x(a) = x(\pi - a)$ dus de x-coördinaten van de twee punten zijn gelijk. [1p]
Opmerking: bij dit type opgave kan je beter een tussenstap te veel dan te weinig noteren.

derde methode:
Analyse: als de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ verticaal is, dan zijn de x-coördinaten van de twee punten gelijk (zie de bij dit examen gegeven formules).
Er moet gelden $x(\pi - a) = x(a)$ dus er moet gelden $\cos(\pi - a) \cdot \sin(2(\pi - a)) = \cos(a) \cdot \sin(2a)$
Omdat geldt $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
en $\sin(2(\pi - a)) = \sin(2\pi - 2a) = \sin(-2a) = -\sin(2a)$ [1p]
geldt dus ook $\cos(\pi - a) \cdot \sin(2(\pi - a)) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a) \cdot \sin(2a)$ [1p]
Conclusie: $x(\pi - a) = x(a)$ dus de x-coördinaten van de twee punten zijn gelijk. [1p]
Opmerking: bij dit type opgave kan je beter een tussenstap te veel dan te weinig noteren.

5p **13** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: afstand P_t tot de x-as is $y(t)$, en afstand P_t tot de y-as is x. Er moet dus gelden $y(t) = \pm 2 \cdot x(t)$
Er moet gelden $y(t) = \pm 2 \cdot x(t)$ [1p] dus $\cos(t) = \pm 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(2t)$
Dus $1 = \pm 2 \cdot \sin(2t)$ of $\cos(t) = 0$ [1p]
Dus $\sin(2t) = \pm\frac{1}{2}$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ [1p] (is buiten beschouwing gelaten, want (0, 0))
Dus $2t = \pm\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $2t = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ [1p]
Dus $t = \pm\frac{1}{12}\pi + k\pi$ of $t = \pm\frac{5}{12}\pi + k\pi$

De eerste vier tijdstippen zijn: $t = \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$

Conclusie: het gevraagde vierde tijdstip is $t = \frac{11}{12}\pi$ [1p]
Opmerking: let op het gegeven interval van t.
Opmerking: er kan ook gewerkt worden met $|y(t)| = 2 \cdot |x(t)|$

5p **14** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: er moet gelden $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$ dus bepaal $\overrightarrow{OP}$ en $\vec{v}$. Bedenk $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ dus noteer x′(t) en y′(t).
Let op: het gaat hier over vectoren, dus niet om lengtes of groottes.

Bepaal $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$:

$x(t) = \cos(t) \cdot \sin(2t)$ dus $x'(t) = -\sin(t) \cdot \sin(2t) + \cos(t) \cdot 2\cos(2t)$ [2p] en dus

$x'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{6}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot 2\cos\left(\frac{6}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 + -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y(t) = \cos(t)$ dus $y'(t) = -\sin(t)$ [1p] en dus $y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dus als $t = \frac{3}{4}\pi$ dan geldt $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ [1p]

Bepaal $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ y\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$:

$x(t) = \cos(t) \cdot \sin(2t)$ dus $x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{6}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y(t) = \cos(t)$ dus $y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dus als $t = \frac{3}{4}\pi$ dan geldt $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ [1p]

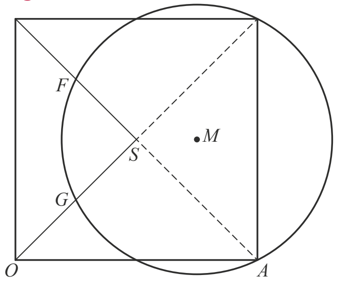
Conclusie: $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$
Opmerking: het is handig zo snel mogelijk de gegeven waarde voor t te gebruiken/in te vullen.

Buiten een vierkant

5p **15** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met behulp van de vergelijking van de cirkel en lijn CS.
Analyse: vierkant met gegeven coördinaten. Vergelijking van cirkel en lijn CS (of OS) is te maken.
Vergelijking cirkel met middelpunt $M(3, 2)$ door $A(4, 0)$ is $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ [1p]
Lijn CS gaat door $C(0, 4)$ en $A(4, 0)$, dus de vergelijking lijn CS is $y=-x+4$ [1p]
Snijpunt F van lijn CS en de cirkel bepalen met
$(x-3)^2+(-x+4-2)^2=5$ dus $x^2-6x+9+x^2-4x+4=5$ [1p]
Dus $x^2-5x+4=0$ dus $x=1$ of $x=4$ (geeft punt A)
Dus voor punt F geldt $x=1$ [1p] en $y=3$, dus $F(1, 3)$
Het midden van $C(0, 4)$ en $A(4, 0)$ is $S(2, 2)$. Het midden van $S(2, 2)$ en $C(0, 4)$ is $(1, 3)$.

Conclusie: het snijpunt F is het midden van CS. [1p]

figuur 1



tweede methode met behulp van de vergelijking van de cirkel en het midden van CS:
Analyse: vierkant met gegeven coördinaten. Vergelijking van cirkel is te maken. Vul midden van CS in.
Vergelijking cirkel met middelpunt $M(3, 2)$ door $A(4, 0)$ is $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ [1p]
Het midden van $C(0, 4)$ en $A(4, 0)$ is $S(2, 2)$. Het midden van $S(2, 2)$ en $C(0, 4)$ is $(1, 3)$. [1p]
$x=1$ en $y=3$ invullen in vergelijking cirkel levert $(1-3)^2+(3-2)^2=5$ Klopt, dus $(1, 3)$ ligt op de cirkel. [1p]
$(1, 3)$ is het midden van CS, dus $(1, 3)$ ligt ook op CS, dus $(1, 3)$ is het snijpunt F van de cirkel en CS. [1p]
Conclusie: F is het midden van CS. [1p]

derde methode met behulp van afstand tot middelpunt:
Analyse: vierkant met gegeven coördinaten. Afstanden tussen punten is te berekenen.
Het midden van $C(0, 4)$ en $A(4, 0)$ is $S(2, 2)$. Het midden van $S(2, 2)$ en $C(0, 4)$ is $(1, 3)$. [1p]
De afstand tussen $(1, 3)$ en $M(3, 2)$ is $\sqrt{5}$. [1p]
De afstand tussen $M(3, 2)$ en $A(4, 0)$ is ook $\sqrt{5}$. [1p]
Dus punt $(1, 3)$ ligt ook op de cirkel met middelpunt M en straal $\sqrt{5}$ en ook op lijn CS. [1p]
Dus $(1, 3)$ is het snijpunt F van lijn CS met de cirkel en $(1, 3)$ is het midden van CS.
Conclusie: F is het midden van CS. [1p]

3p **16** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode met richtingscoëfficiënt en symmetrie:
Analyse: als de twee sectoren samen de helft zijn, dan zal elk van de sectoren (symmetrie overwegingen) een kwart zijn. Dus hoek FMB (of hoek GMA) zal 90° zijn. Bewijs dit.
Bekend zijn $M(3, 2)$, $B(4, 4)$, $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$. F is het midden van CS dus geldt $F(1, 3)$
$F(1, 3)$ en $M(3, 2)$ dus $rc_{FM}=-\frac{1}{2}$ en $B(4, 4)$ en $M(3, 2)$ dus $rc_{BM}=\frac{2}{1}=2$ [1p]
Dus $rc_{FM}\cdot rc_{BM}=-1$ dus FM en BM staan loodrecht op elkaar, dus $\angle FMB=90°$.
Dus oppervlakte van segment FMB is een kwart van de oppervlakte van de hele cirkel. [1p]
Conclusie: de oppervlakte van de twee sectoren is (vanwege symmetrie overwegingen) de helft van de oppervlakte van de cirkel. [1p]
Opmerking: symmetrie overwegingen moeten genoemd worden.

tweede methode met vectoren en symmetrie:
Analyse: als de twee sectoren samen de helft zijn, dan zal elk van de sectoren (symmetrie overwegingen) een kwart zijn. Dus hoek FMB (of hoek GMA) zal 90° zijn. Bewijs dit.
$F(1, 3)$ en $M(3, 2)$ dus $\overrightarrow{FM}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ en $B(4, 4)$ en $M(3, 2)$ dus $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ [1p]
Dus voor de richtingsvectoren geldt: $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=-2+2=0$ dus FM en BM staan loodrecht op elkaar.
Dus $\angle FMB=90°$.
Dus oppervlakte van segment FMB is een kwart van de oppervlakte van de hele cirkel. [1p]
Conclusie: de oppervlakte van de twee sectoren is (vanwege symmetrie overwegingen) de helft van de oppervlakte van de cirkel. [1p]
Opmerking: symmetrie overwegingen moeten genoemd worden.

derde methode met richtingscoëfficiënt:
Analyse: halve cirkel dus hoek FMB plus hoek GMA is 180°. Bewijs dit.
Bekend zijn $M(3, 2)$, $B(4, 4)$, $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$. F is het midden van CS dus geldt $F(1, 3)$
$F(1, 3)$ en $M(3, 2)$ dus $rc_{FM}=-\frac{1}{2}$ en $B(4, 4)$ en $M(3, 2)$ dus $rc_{BM}=\frac{2}{1}=2$
Dus $rc_{FM}\cdot rc_{BM}=-1$ dus FM en BM staan loodrecht op elkaar, dus $\angle FMB=90°$.
Dus oppervlakte van segment FMB is een kwart van de oppervlakte van de hele cirkel. [1p]
$O(0, 0)$ en $S(2, 2)$. G is het midden van OS dus geldt $G(1, 1)$
$G(1, 1)$ en $M(3, 2)$ dus $rc_{GM}=\frac{1}{2}$ en $A(4, 0)$ en $M(3, 2)$ dus $rc_{AM}=\frac{-2}{1}=-2$
Dus $rc_{GM}\cdot rc_{AM}=-1$ dus FM en BM staan loodrecht op elkaar, dus $\angle GMA=90°$.
Dus oppervlakte van segment GMB is een kwart van de oppervlakte van de hele cirkel. [1p]
Conclusie: de oppervlakte van de twee sectoren is de helft van de oppervlakte van de cirkel. [1p]

Examen 2019-I

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

Gegeven is cirkel c met middelpunt (1, 7) en straal 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong.

Lijn k snijdt cirkel c in twee punten.

5p **1** Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

Rechts van het snijpunt

De functies f en g zijn gegeven door:

$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x}$ en

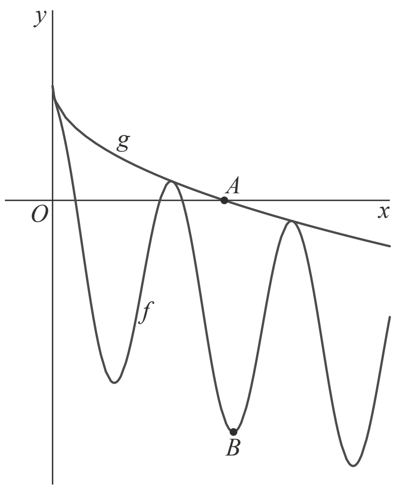
$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$

De grafiek van g snijdt de x-as in punt A.
De grafiek van f heeft diverse toppen, alle met een positieve x-coördinaat.
Punt B is de derde van deze toppen.
Zie de figuur.

Er geldt: punt B ligt rechts van punt A.

5p **2** Toon dit aan met behulp van de afgeleide van f.

figuur



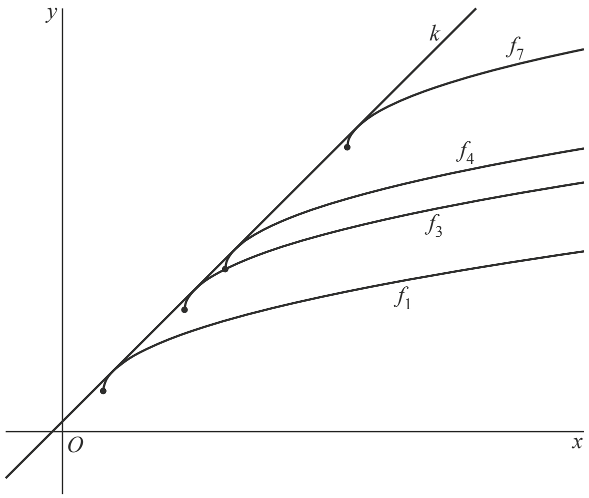
Altijd raak

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door:

$f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.

figuur 1



Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

5p **3** Bewijs dit.

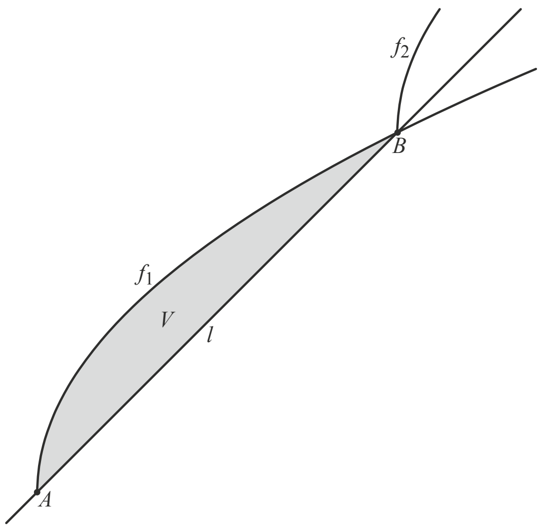
Voor $p \geq 1$ heeft de grafiek van f_p een randpunt, ook wel beginpunt genoemd. De randpunten van de grafieken in figuur 1 zijn met een stip aangegeven.

Er geldt voor elke $p \geq 1$: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

3p **4** Bewijs dat inderdaad voor $p \geq 1$ geldt: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

Punt A (1, 1) is het randpunt van de grafiek van f_1. Punt B (2, 2) is het randpunt van de grafiek van f_2. B ligt dus op de grafiek van f_1.
Door de punten A en B gaat een lijn l.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn l en de grafiek van f_1.
Zie figuur 2.

figuur 2



5p **5** Bereken exact de oppervlakte van V.

Slingshot

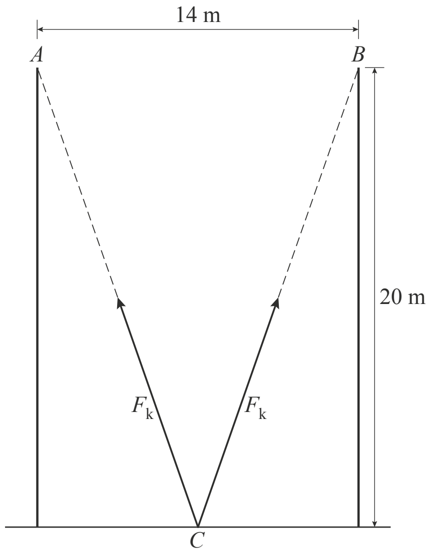
De Slingshot is een kermisattractie. Tussen de toppen van twee palen hangt aan twee identieke elastische koorden een capsule die plaats biedt aan twee personen. Zie de foto. De capsule wordt allereerst omlaag getrokken tot aan de grond. Op dat moment gaan er twee personen in de capsule zitten. Vervolgens wordt de capsule losgelaten. De capsule schiet dan recht omhoog. Daarna valt hij recht omlaag, gaat weer omhoog, enzovoorts. Na enige tijd komt de capsule stil te hangen.

foto

Gegeven is:
- De palen staan 14 m uit elkaar.
- De palen staan verticaal.
- De palen zijn 20 m hoog.
- Zonder uitrekking heeft elk koord een lengte van 8 m.
- Elk koord trekt aan de capsule met een kracht die afhangt van de lengte van het uitgerekte koord. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de formule:
  $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$
  Hierbij is F_k de grootte van de kracht in kN (kilonewton) en L de lengte van het uitgerekte koord in m (met $L \geq 8$).

In figuur 1 is de beginsituatie weergegeven. De capsule is aangegeven met het punt C en de toppen van de palen met A en B. De capsule bevindt zich op de grond, midden tussen de palen. Beide koorden, CA en CB, zijn dan flink uitgerekt en staan strak.

figuur 1

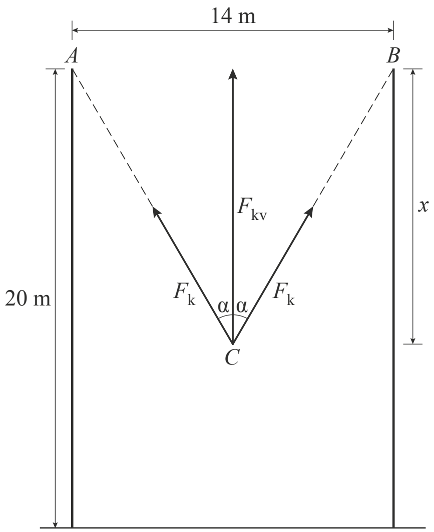


3p **6** Bereken de grootte van de kracht in kN waarmee een koord in de beginsituatie aan de capsule trekt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

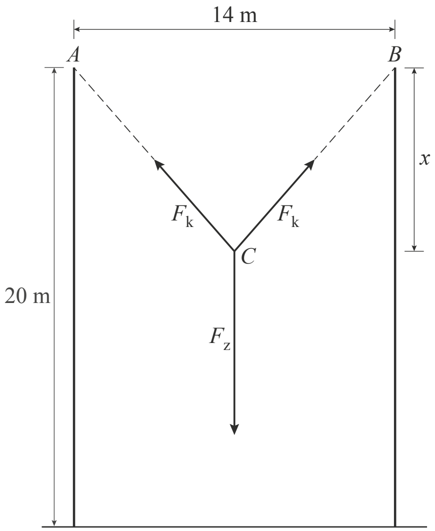
De twee krachten kun je weergeven met twee vectoren.
De som van deze twee vectoren is een vector die een verticale kracht weergeeft met grootte F_{kv}. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de volgende formule:
$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$

Hierin is α de hoek tussen een koord en de verticale vector. Zie figuur 2.

figuur 2



figuur 3



Op de capsule, inclusief de twee personen, werkt niet alleen de kracht van beide koorden, maar ook de zwaartekracht F_z, die recht naar beneden is gericht. Zie figuur 3. Deze zwaartekracht bedraagt 1,8 kN. In figuur 2 en figuur 3 is ook het hoogteverschil tussen C en de toppen van de palen met x aangegeven.

Na een aantal keren op en neer te zijn geslingerd, is de capsule tot stilstand gekomen. Op dat moment heft de zwaartekracht de twee krachten op die door de koorden samen worden uitgeoefend.

Er geldt dan dus: $F_{kv} = F_z$

De hoogte waarop de capsule tot stilstand komt, is te berekenen door eerst F_{kv} in x uit te drukken.

6p **7** Druk F_{kv} uit in x en bereken daarmee hoe hoog de capsule boven de grond hangt als hij tot stilstand is gekomen. Geef je eindantwoord in gehele meters.

Een logaritmische functie en haar afgeleide

De functies f en g worden gegeven door:

$f(x) = x\ln(x) - x + 1$

$g(x) = f'(x)$

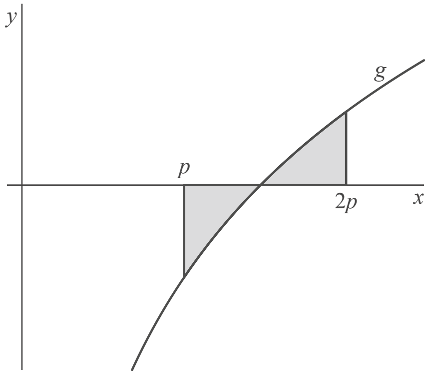
5p **8** Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

Er is één waarde van p waarvoor geldt:

$$\int_p^{2p} g(x)\,dx = 0$$

Voor deze waarde van p is de situatie in de figuur geschetst.

figuur



7p **9** Bereken exact deze waarde van p. Schrijf je eindantwoord in de vorm $p = ae$, waarbij a een getal is.

Gebroken goniometrische functie

De functie f is gegeven door:

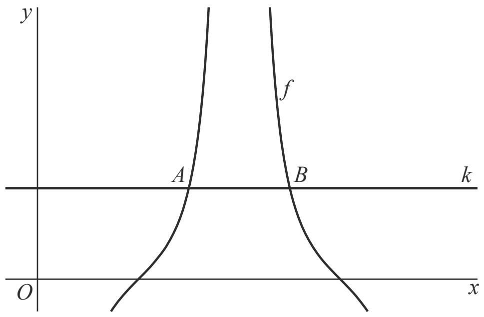
$$f(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$$

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = \sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten. De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x-coördinaten. Deze zijn in figuur 1 aangegeven.

6p **10** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

figuur 1



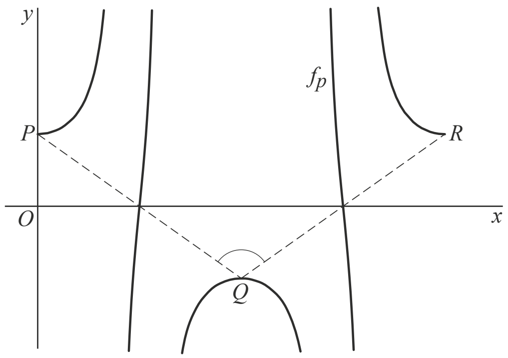
Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$$

6p **11** Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft.

In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt: $p \neq 0$
De punten op de grafiek van f_p met x-coördinaten 0, π en 2π noemen we respectievelijk P, Q en R.
In figuur 2 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven.
Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.

figuur 2



Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

4p **12** Bereken exact deze waarden van p.

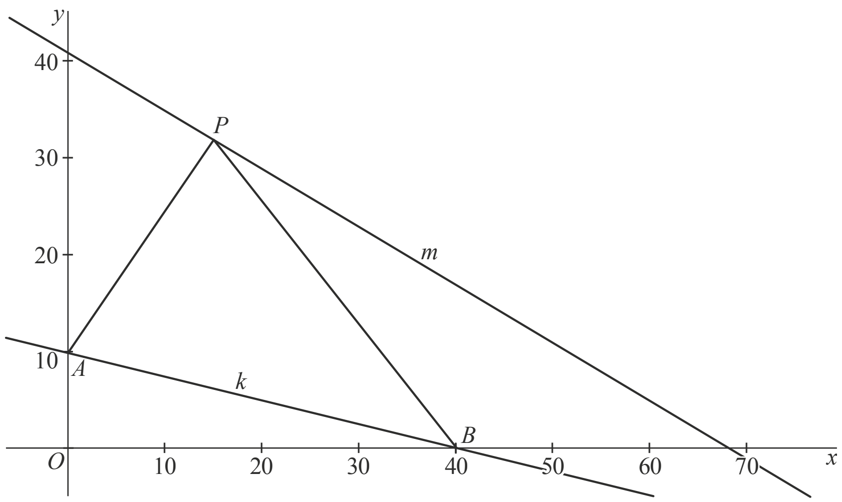
Driehoek met bewegend hoekpunt

Lijn k gaat door de punten A (0, 10) en B (40, 0).
De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.

figuur



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

5p **13** Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

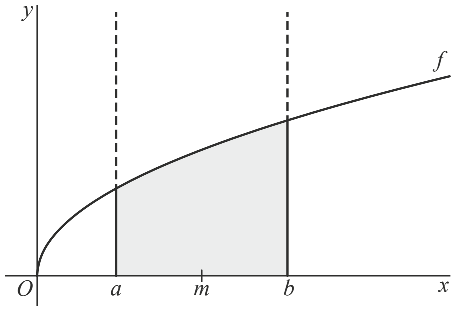
8p **14** Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

Afgeknotte paraboloïde

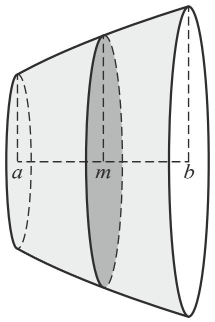
De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$. De grafiek van f is getekend in figuur 1, samen met de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = b$, waarbij $0 < a < b$. Midden tussen de punten $(a, 0)$ en $(b, 0)$ ligt het punt $(m, 0)$.

De grafiek van f, de x-as en de twee verticale lijnen sluiten een gebied in. Dit gebied, in figuur 1 met grijs aangegeven, wordt gewenteld om de x-as. Het omwentelingslichaam is een zogenaamde **afgeknotte paraboloïde**.
Deze is afgebeeld in figuur 2.

figuur 1



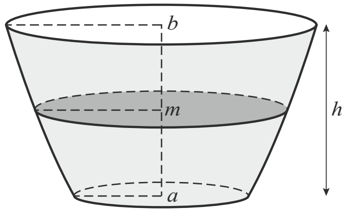
figuur 2



Bij de omwenteling beschrijft elk punt van de grafiek een cirkel.
De oppervlakte van de cirkel die beschreven wordt door het punt $(m, \sqrt{m})$ noemen we A. De cirkelschijf met deze oppervlakte is met donkergrijs aangegeven in figuur 2.

In figuur 3 staat de afgeknotte paraboloïde een kwartslag gedraaid. In die figuur is ook de hoogte h van de afgeknotte paraboloïde aangegeven.

figuur 3



Voor de inhoud V van de afgeknotte paraboloïde geldt de formule:

$$V = h \cdot A$$

7p **15** Bewijs dit.

Hints bij examen 2019-I

1 Maak een schets. Stel de vergelijkingen van cirkel *c* op.

2 Bereken punten *A* en *B*. Top, dus afgeleide = 0. Let op de kettingregel.

3 Raken, dus moet gelden $f_p(a) = y(a)$ en $f_p'(a) = y'(a)$. In de raakpunten geldt: richtingscoëfficiënt = 1.

4 Druk de coördinaten van de randpunten van f_p uit in *p* en geef de vergelijking van f_{p-1}.

5 Bepaal de primitieve van f_1 en *l*. Gebruik de formule:
oppervlakte = $\int_1^2 (\text{bovenste} - \text{onderste})\, dx = \int_1^2 (f_1(x) - l(x))\, dx$.

6 *L* is de lengte van het uitgerekte koord, dus de afstand van *BC*. Bereken eerst *L*.

7 Druk eerst *L* uit in *x*. Denk aan Pythagoras.

8 Bepaal $f'(x)$ en bereken daarmee exact de vergelijking $f(x) = g(x)$. Let op de productregel.

9 Omdat $g(x) = f'(x)$ geldt ook $G(x) = f(x) = x\ln(x) - x + 1$.

10 Opgelost moet worden $f(x) = \sqrt{2}$. Denk aan de goniometrie-formules op het formuleblad.

11 Perforatie, dus teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van *x* gelijk aan 0. Controleer voor deze *x*-waarde of de limiet bestaat.

12 Druk de coördinaten van *P*, *Q* en *R* uit in *p*.
Product van de richtingscoëfficiënten = –1. (Er zijn voor de oplossing meerdere varianten mogelijk, bijvoorbeeld product richtingsvectoren = 0 of Pythagoras.)

13 De punten *A*, *B* en *P* vormen géén driehoek als *P* op het snijpunt van de lijnen *k* en *m* ligt.

14 Loodrecht, dus inproduct = 0. Gelijkbenig, dus $|AP| = |BP|$. (Er zijn voor de oplossing meerdere varianten mogelijk, bijvoorbeeld oplossing met product richtingscoëfficiënten = –1, Thales of middelloodlijn.)

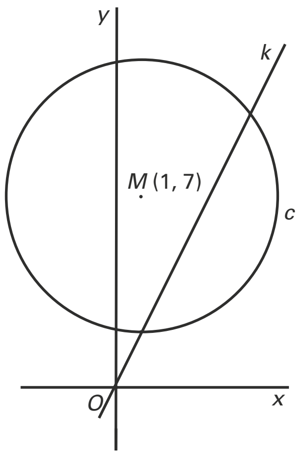
15 Gebruik $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$. Druk *m*, *V* en *h* uit in *a* en *b*.

 ©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2019-I

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

5p **1** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maak een schets. Stel de vergelijkingen van cirkel c en lijn k op.



eerste methode met behulp van de vergelijking van lijn k:
Cirkel *c* heeft middelpunt (1, 7) en straal 5, dus
$c: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$. [1p]
De richtingsvector van lijn *k* is $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, dus de richtingscoëfficiënt is 2 en de vergelijking van lijn *k* door de oorsprong is dus $k: y = 2x$.
Substitutie van $y = 2x$ levert $(x-1)^2 + (2x-7)^2 = 25$. [1p]
Dus voor de snijpunten van *c* en *k* geldt
$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 28x + 49 = 25$.
Herleiden levert $5x^2 - 30x + 25 = 0$ en $x^2 - 6x + 5 = 0$ [1p]
en $(x-1)(x-5) = 0$, dus $x = 1$ en $x = 5$. [1p]
Conclusie: de snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10). [1p]
Opmerking: controleer het resultaat in de tekening.

tweede methode met behulp van de vectorvoorstelling van lijn k:
Cirkel *c* heeft middelpunt (1, 7) en straal 5 dus $c: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$. [1p]
Er geldt $x = t$ en $y = 2t$.
Substitutie van $x = t$ en $y = 2t$ levert $(t-1)^2 + (2t-7)^2 = 25$. [1p]
Dus voor de snijpunten van *c* en *k* geldt $t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 25$.
Herleiden levert $5t^2 - 30t + 25 = 0$ [1p] en $t^2 - 6t + 5 = 0$ en $(t-1)(t-5) = 0$ dus $t = 1$ en $t = 5$. [1p]
Conclusie: de snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10). [1p]
Opmerking: controleer het resultaat in de tekening.

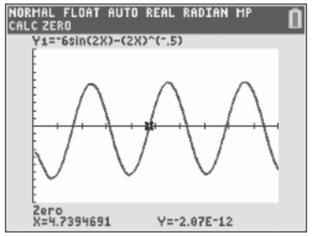
Rechts van het snijpunt

5p **2** *Toon aan, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: punt A wordt genoemd, dus bereken de coördinaten (x-coördinaat) van punt A. Punt B wordt genoemd, dus bereken de coördinaten (x-coördinaat) van punt B. Punt B is een top, dus bereken x-coördinaat met afgeleide = 0. Gebruik van afgeleide van f is verplicht, let op kettingregel.

eerste methode, bereken de x-coördinaat van A en B:
Bereken *x*-coördinaat punt *A*:
$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$ dus $3 - \sqrt{2x} = 0$ oplossen levert $\sqrt{2x} = 3$ dus $2x = 9$ dus $x_A = 4\frac{1}{2}$ [1p]
Bereken *x*-coördinaat punt *B*:
$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x} = 3\cos(2x) - (2x)^{\frac{1}{2}}$
Afgeleide van *f* opstellen: $f'(x) = -3\sin(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = -6\sin(2x) - (2x)^{-\frac{1}{2}}$
(of $f'(x) = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$) [2p]

©ThiemeMeulenhoff

Punt B is de derde top, dus afgeleide $f'(x) = 0$ en neem de derde x-waarde vanaf de oorsprong waarvoor dit geldt.



Berekenen x-coördinaat punt B met grafische rekenmachine:
$y_1 = -6\sin(2x) - (2x)^{-\frac{1}{2}}$ en Calc Zero levert $x_B = 4{,}7...$ [1p]

Conclusie: omdat $4{,}7... > 4\frac{1}{2}$ ligt punt B rechts van punt A. [1p]
Opmerkingen: omdat het gebruik van de grafische rekenmachine toegestaan is, is het verder herleiden van $f'(x)$ niet nodig. Gebruik in de conclusie dezelfde woorden als in de vraag, dus niet 'A links van B'.

tweede methode, laat zien of de x-coördinaat van A op het dalende stuk links van B ligt of op het stijgende stuk rechts van B:
Bereken x-coördinaat punt A:
$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$ dus $3 - \sqrt{2x} = 0$ oplossen levert $\sqrt{2x} = 3$ dus $2x = 9$ dus $x_A = 4\frac{1}{2}$ [1p]
Afgeleide van f opstellen: $f'(x) = -3\sin(2x)\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = -6\sin(2x) - (2x)^{-\frac{1}{2}}$
(of $f'(x) = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$) [2p]

Voor $x = 4\frac{1}{2}$ geldt $f'(4\frac{1}{2}) = -2{,}80...$. dus de grafiek van f daalt als $x = 4\frac{1}{2}$.

Dus $x = 4\frac{1}{2}$ ligt op het dalende stuk van de grafiek, dus de top van f ligt rechts van het nulpunt van g. [1p]
Conclusie: punt B ligt rechts van punt A. [1p]
Opmerkingen: omdat het gebruik van de grafische rekenmachine toegestaan is, is het verder herleiden van $f'(x)$ niet nodig. Gebruik in de conclusie dezelfde woorden als in de vraag, dus niet 'A links van B'.

Altijd raak

5p **3** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: raken, dus moet gelden $f_p(a) = y(a)$ en $f_p'(a) = y'(a)$. In de raakpunten geldt richtingscoëfficiënt = 1.

eerste methode, raakpunten berekenen en controleren of deze raakpunten op lijn k liggen:
$f_p(x) = p + \sqrt{x-p} = p + (x-p)^{\frac{1}{2}}$ dus $f_p'(x) = \frac{1}{2}(x-p)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(x-p)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x-p}}$ [1p]
(ga na wat er door het differentiëren met de parameter p gebeurt)
Er moet gelden $f'(x) = y'(x)$ en er geldt $y' = 1$, dus:
$\frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$ dus $\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$ dus $x = p + \frac{1}{4}$ [1p]
dus in de raakpunten geldt $x = p + \frac{1}{4}$.

Controleer of voor $x = p + \frac{1}{4}$ geldt dat $f_p(x) = y(x)$.

Voor f geldt: $f_p(x) = f_p(p + \frac{1}{4}) = p + \sqrt{p + \frac{1}{4} - p} = p + \sqrt{\frac{1}{4}} = p + \frac{1}{2}$ dus $y = p + \frac{1}{2}$ [1p]

Voor k geldt: $y(x) = y(p + \frac{1}{4}) = p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = p + \frac{1}{2}$ [1p]

Dus voor $x = p + \frac{1}{4}$ geldt $f_p'(x) = y'(x) = 1$ en $f_p(x) = y(x)$.

Conclusie: lijn k raakt de grafiek van f_p. [1p]

tweede methode, maak gebruik van de functie $g(x) = \sqrt{x}$ en van de translatie p naar rechts en p omhoog:
De standaardfunctie $g(x) = \sqrt{x}$ transleren over $\binom{p}{p}$ geeft $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$.

$y = x + \frac{1}{4}$ transleren over de vector $\binom{p}{p}$ geeft de lijn $k : y = (x-p) + \frac{1}{4} + p = x + \frac{1}{4}$.

Bewijs nu dat $g(x) = \sqrt{x}$ de lijn $y = x + \frac{1}{4}$ raakt.

$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ dus $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ [1p]

Voor het raakpunt moet gelden $g'(x) = y'(x)$ en er geldt $y' = 1$ dus:
$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$ dus $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ dus $x = \frac{1}{4}$ [1p]

Dus in het raakpunt van g met richting = 1 geldt $x = \frac{1}{4}$ en $g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ [1p]

$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ligt ook op de lijn $k : y = x + \frac{1}{4}$ (want $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$).

Dus in $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ geldt: $g'(x) = y'(x) = 1$ en $g(x) = y(x)$, dus y en g raken elkaar. [1p]

De grafieken van $g(x) = \sqrt{x}$ en $y = x + \frac{1}{4}$ transleren over $\binom{p}{p}$ geeft $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ en $k : y = x + \frac{1}{4}$, dus deze grafieken raken elkaar in $\left(\frac{1}{4} + p, \frac{1}{2} + p\right)$.
Conclusie: lijn k raakt de grafiek van f_p. [1p]

derde methode, gemeenschappelijke punten (raakpunten) van k en f_p berekenen:
Analyse: raken, dus één punt gemeenschappelijk, dus discriminant = 0.
$k : y = x + \frac{1}{4}$ snijden met $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$, dus $p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4}$ [1p]

Oplossen, dus $\sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} - p$ dus $x - p = (x + \frac{1}{4} - p)^2 = x^2 + 2x\cdot(\frac{1}{4} - p) + (\frac{1}{4} - p)^2$ [1p]

Dus $x^2 + \frac{1}{2}x - 2px - x + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}p + p^2 + p = 0$ dus $x^2 + (-\frac{1}{2} - 2p)\cdot x + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}p + p^2 = 0$

Discriminant is $(-\frac{1}{2} - 2p)^2 - 4\cdot 1\cdot(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}p + p^2) = 0$ dus $\frac{1}{4} + 2p + 4p^2 - \frac{1}{4} - 2p - 4p^2 = 0$ [1p]
Voor elke waarde van p is de discriminant gelijk aan 0. [1p] Dus k en f_p hebben altijd één gemeenschappelijk punt. [1p]
Omdat het randpunt (of de hele grafiek van f_p) onder (of rechts van) de grafiek van k ligt, is er sprake van een raakpunt (geen snijpunt), zie de figuur.
Conclusie: lijn k raakt de grafiek van f_p.

3p **4** *Analyse: genoemd worden randpunten, dus druk de randpunten van f_p uit in p. Het randpunt van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}, dus geef de vergelijking van f_{p-1}.*
Randpunt, dus onder het wortelteken moet 0 staan, dus $x - p = 0$ dus $x_{randpunt} = p$ [1p]
en $y_{randpunt} = p + \sqrt{p-p} = p$
Vergelijking $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ dus vergelijking $f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x-(p-1)}$ [1p] *(let op de haakjes)*
Controle dat randpunt (p, p) op grafiek van f_{p-1} ligt: $f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p-(p-1)} = p - 1 + \sqrt{p-p+1} = p - 1 + 1 = p = y_{randpunt}$ [1p]
Conclusie: het randpunt van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.
Opmerking: het resultaat van deze opgave kan misschien gebruikt worden bij de volgende opgave.

5p **5** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode met behulp van $\int_1^2 (\text{bovenste} - \text{onderste})\,dx$:

Analyse: bepaal primitieve van f_1 *en* l. *Gebruik formule oppervlakte* $= \int_1^2 (f_1(x) - l(x))\,dx$. [1p]

Lijn l gaat door $A(1, 1)$ en $B(2, 2)$, dus de vergelijking van lijn l is $y = x$. [1p]

Primitieve van $f_1(x) = 1 + \sqrt{x-1} = 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}}$ is $F_1(x) = x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ [2p]

Primitieve van l : $y = x$ is $L(x) = \frac{1}{2}x^2$

Gevraagde oppervlakte $\int_1^2 (f_1(x) - l(x))\,dx = \left[x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$= 2 + \frac{2}{3} - 2 - (1 + 0 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

Conclusie: gevraagde oppervlakte $= \frac{1}{6}$ [1p]

tweede methode, de oppervlakte onder de lijn l bestaat uit een driehoek en een rechthoek:
Analyse: bepaal primitieve van f_1. *Bepaal de oppervlakte onder de lijn l.*

Primitieve van $f_1(x) = 1 + \sqrt{x-1} = 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}}$ is $F_1(x) = x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ [2p]

Oppervlakte onder f_1 is $\int_1^2 f_1(x)\,dx = \left[x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 2 + \frac{2}{3} - (1 + 0) = 1\frac{2}{3}$ [1p]

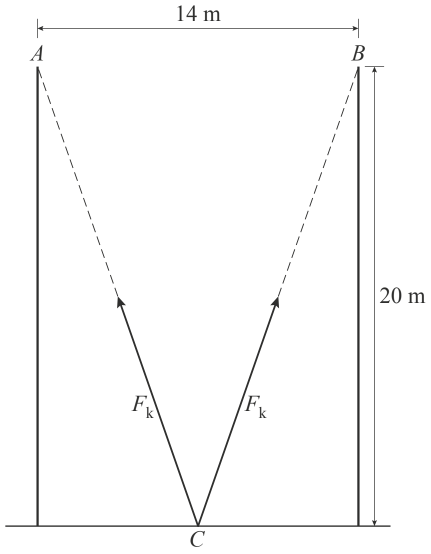
Oppervlakte onder lijn l bestaat uit:
- een rechthoek met hoogte 1 en breedte 1 en dus oppervlakte 1
- en daarop een rechthoekige driehoek met hoogte 1 en breedte 1 en dus oppervlakte $\frac{1}{2}$

De oppervlakte onder lijn l is dus $1\frac{1}{2}$ [1p]

Conclusie: gevraagde oppervlakte $= 1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ [1p]

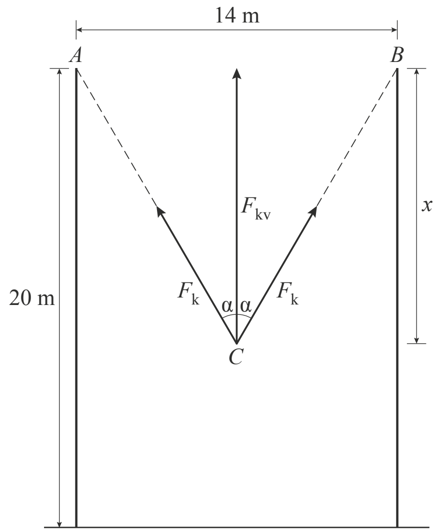
Slingshot

3p **6** *Bereken, rond af op één decimaal, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: de formule $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$ *is gegeven.*
Gevraagd wordt de kracht F_k. *Bereken dus eerst L met Pythagoras.*
L is de lengte van het koord, dus de afstand CB (of CA).
$L = \sqrt{7^2 + 20^2} = 21{,}18\ldots$ [2p]
Dus $F_k = 0{,}6 \cdot (21{,}18\ldots - 8)$
Conclusie: $F_k \approx 7{,}9$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen, geef tussenberekeningen met niet-afgeronde getallen. Tussenberekening niet afronden en dus noteren als L = 21,18... (dus met drie punten).



6p **7** *Let op, er worden hier twee vragen gesteld.*
Vraag 1: Druk F_{kv} *uit in x. Druk uit, dus gebruik grafische rekenmachine is in dit eerste deel niet toegestaan.*
Vraag 2: Bereken hoe hoog de capsule boven de grond hangt en rond af op één decimaal. Bereken, dus de grafische rekenmachine is in dit tweede deel wel toegestaan.

Analyse: gegeven zijn de formules $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$ *en* $F_z = 1{,}8$. *De kracht* F_{kv} *is afhankelijk van* F_k, *dus gebruik ook de formule* $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$. *Hierin is L de lengte van het uitgerekte koord. L is afhankelijk van het hoogteverschil x tussen C en B (of C en A). Dus druk L uit in x. Opgelost moeten worden* $F_{kv} = 1{,}8$.



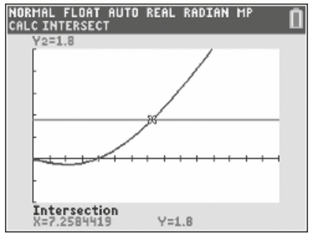
F_{kv} uitdrukken in x:
L uitdrukken in x levert $L^2 = x^2 + 7^2$ dus
$L = \sqrt{x^2 + 49}$ [1p]
dus $F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8) = 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8)$
dus $F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$
$= 2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \cos(\alpha)$

Omdat $\cos(\alpha) = \frac{x}{L}$ [1p] $= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$ geldt:

$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$
$= 2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$ [1p]

Berekenen van x:
Omdat $F_{kv} = F_z$ en $F_z = 1{,}8$ moet opgelost worden $2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}} = 1{,}8$ [1p]

Deze vergelijking oplossen met de grafische rekenmachine:



$y_1 = 2 \cdot 0{,}6 \cdot (\sqrt{x^2 + 49} - 8) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$

$y_2 = 1{,}8$

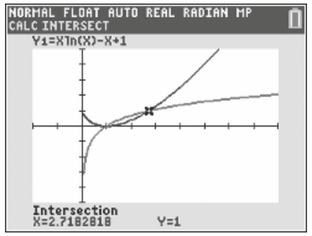
Calc Intersect levert $x = 7{,}25\ldots$ [1p]

Conclusie: hoogte boven de grond is $20 - 7{,}25\ldots$
dus afgerond 13 meter. [1p]
Opmerkingen: noteer altijd de vergelijking die met behulp van de grafische rekenmachine opgelost moet worden.
Het is niet nodig de vergelijking eerst te vereenvoudigen of deels zelf op te lossen voordat hij ingevoerd wordt in de rekenmachine. Let bij je eindantwoord op het aantal decimalen (en wat de vraag is).

Een logaritmische functie en haar afgeleide

5p **8** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd worden f(x) en f′(x) = g(x). Bepaal f′(x) en los daarmee de vergelijking f(x) = g(x) op. Let op gebruik productregel.

$f(x) = x\ln(x) - x + 1$ dus $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = g(x)$ [1p]
(productregel)
Vergelijking $f(x) = g(x)$ exact oplossen, dus
$x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$ [1p]
dus $x\ln(x) - \ln(x) - x + 1 = 0$ dus
$\ln(x) \cdot (x - 1) - x + 1 = 0$ dus $\ln(x) \cdot (x - 1) = 1 \cdot (x - 1)$* [1p]
dus $x - 1 = 0$ of $\ln(x) = 1$ [1p] en dus $x = 1$ of $x = e$ [1p]
(controleer de antwoorden, zie plot)
Conclusie: $x = 1$ of $x = e$.



Opmerking: als A · B = A · C dan A = 0 of B = C, dus hier met A = x − 1 en B = ln(x) en C = 1*
of $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$ kan herschreven worden tot

$\ln(x) = \frac{x-1}{x-1} = 1$ *voor x ≠ 1. Dit levert x = e op. Controleer daarnaast of ook x − 1 = 0 dus x = 1 een oplossing is!*

7p **9** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: omdat g(x) = f′(x) geldt ook G(x) = f(x) = xln(x) − x + 1. De primitieve van g(x) is dus gegeven.

eerste methode met behulp van de uitkomst van de integraal is 0:

$\int_p^{2p} g(x)\,dx = [G(x)]_p^{2p} = G(2p) - G(p) = f(2p) - f(p)$

$f(p) = p \cdot \ln(p) - p + 1$ en $f(2p) = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1$
Er moet gelden $f(2p) - f(p) = 0$ [1p] dus $2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - (p \cdot \ln(p) - p + 1) = 0$ [1p]
dus $2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - p \cdot \ln(p) + p - 1 = 0$
dus $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) - p = 0$ dus $p \cdot (2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1) = 0$ [1p]
dus $2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1 = 0$ [1p] ($p = 0$ voldoet niet)

$\ln((2p)^2) - \ln(p) - 1 = 0$ dus $\ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) - 1 = 0$ dus $\ln(4p) = 1$ [2p] dus $4p = e$
(rekenregels logaritmen)

Conclusie: $p = \frac{1}{4}e$ [1p]

Opmerking: als primitieve van g(x) kan in plaats van f(x) = xln(x) − x + 1 ook G(x) = x ln(x) − x genomen worden.

tweede methode met behulp van twee gelijke oppervlaktes:
Analyse: de oppervlaktes links en rechts van het snijpunt van de grafiek van g met de x-as moeten gelijk zijn.

Snijpunt van g met de x-as: $g(x) = f'(x) = \ln(x) = 0$ dus $x = 1$

Opgelost moet worden $-\int_p^1 g(x)\,dx = \int_1^{2p} g(x)\,dx$ [1p]

Omdat $-\int_p^1 g(x)\,dx = -[G(x)]_p^1 = -G(1) + G(p) = -f(1) + f(p)$ en

$\int_1^{2p} g(x)\,dx = [G(x)]_1^{2p} = G(2p) - G(1) = f(2p) - f(1)$ [1p]

geldt $-f(1) + f(p) = f(2p) - f(1)$ dus $p \cdot \ln(p) - p + 1 = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1$ [1p]
dus $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) - p = 0$ dus $p \cdot (2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1) = 0$
dus $2 \cdot \ln(2p) - \ln(p) - 1 = 0$ [1p] ($p = 0$ voldoet niet)

$\ln((2p)^2) - \ln(p) - 1 = 0$ dus $\ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) - 1 = 0$ dus $\ln(4p) = 1$ [2p] dus $4p = e$
(rekenregels logaritmen)

Conclusie: $p = \frac{1}{4}e$ [1p]

Opmerking: als primitieve van g(x) kan in plaats van f(x) = xln(x) − x + 1 ook G(x) = x ln(x) − x genomen worden.

Gebroken goniometrische functie

6p **10** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: opgelost moet worden f(x) = √2. (Denk aan de goniometrie-formules vooraan het examen, zie ook de bijlage formuleblad in deze examenbundel.)

Opgelost moet worden $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$ [1p] dus $\cos(x) = \sqrt{2} \cdot -\sin^2(x)$

dus $\cos(x) = \sqrt{2} \cdot (\cos^2(x) - 1)$ [1p] (want $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

dus $\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$ [1p]

dus $\cos(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2}}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot \sqrt{2}}$ *(abc-formule)* [1p]

dus $\cos(x) = \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ [1p] (of $\cos(x) = \frac{4}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (heeft geen oplossingen))

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dus $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = \frac{5}{4}\pi$

Conclusie: de x-coördinaten van A en B zijn $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = \frac{5}{4}\pi$. [1p]

6p **11** *Onderzoek, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: perforatie, dus teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van x gelijk aan 0 én de limiet bestaat.

eerste methode, perforatie als de teller en noemer voor x = a nul zijn én de limietwaarde voor x = a bestaat. Begin met de teller = 0:
Perforatie: teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van x gelijk aan 0. [1p]

Teller $\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ [1p]

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right) = 1$ en $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right) = -1$,
dus voor deze waarden van x geldt $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1$ dus $\sin^2(x) = 1$, [1p]

dus als $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ en noemer $p - \sin^2(x) = 0$ dan moet gelden $p = 1$. [1p]

$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$ heeft een perforatie als voor $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ de $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi + k\pi} f_1(x)$ bestaat.

$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ [1p] en $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi + k\pi} f_1(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi + k\pi} \frac{1}{\cos(x)}$ geeft

1 gedeeld door 0, dus deze limiet bestaat niet.

Dus de grafiek heeft voor $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ een verticale asymptoot (teller ≠ 0 en noemer = 0).

Conclusie: de grafiek van $f_1(x)$ heeft geen perforaties. [1p]
Opmerkingen: beschouw het hele domein, dus vergeet de +kπ van $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ niet. Het controleren van oplossingen is, zeker in deze opgave, belangrijk. Een schets verduidelijkt de situatie.

tweede methode, perforatie als de teller en noemer voor $x = a$ nul zijn én de limietwaarde voor $x = a$ bestaat. Begin met de noemer = 0:

Perforatie: teller en noemer zijn voor dezelfde waarde van x gelijk aan 0. [1p]

Noemer is 0 als $p - \sin^2(x) = 0$ dus als $\sin^2(x) = p$.

Als $\sin^2(x) = p$ dan geldt $1 - \cos^2(x) = p$ dus dan geldt $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$. [1p]

Als de teller $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$ is gelijk aan 0 dan geldt $p = 1$. [1p]

Controle: als $p = 1$, heeft $f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}$ dan perforaties?

Teller $\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ [1p]

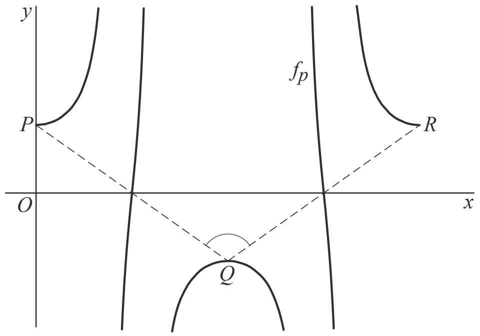
$f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ [1p] en $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1}{\cos(x)}$

(en voor de andere waarden van $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$) bestaat niet.

Conclusie: de grafiek van $f_1(x)$ heeft geen perforaties. [1p]

Opmerkingen: beschouw het hele domein, dus vergeet de $+k\pi$ van $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ niet. Het controleren van oplossingen is, zeker in deze opgave, belangrijk. Een schets verduidelijkt de situatie.

4p **12** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*



eerste methode met behulp van de richtingscoëfficiënten:
Analyse: denk aan het product van de richtingscoëfficiënten = −1. Druk de coördinaten van P, Q en R uit in p.

De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$. [1p]

De richtingscoëfficiënt van PQ is

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{\pi - 0} = -\dfrac{2}{p\pi}$.

De richtingscoëfficiënt van QR is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}}{2\pi - \pi} = \dfrac{2}{p\pi}$ [1p]

Loodrecht als $-\dfrac{2}{p\pi} \cdot \dfrac{2}{p\pi} = -1$ dus als $\dfrac{4}{\pi^2} = p^2$ [1p]

Conclusie: PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$ [1p]

tweede methode met behulp van de richtingsvectoren:
Analyse: denk aan het inproduct van de richtingsvectoren = 0. Druk de coördinaten van P, Q en R uit in p.

De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$ [1p]

De richtingsvector $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi - 0 \\ -\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix}$.

De richtingsvector $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2\pi - \pi \\ \frac{1}{p} - -\frac{1}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$ [1p]

Loodrecht als $\begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix} = 0$ dus als $\pi^2 - \dfrac{4}{p^2} = 0$ dus als $p^2 = \dfrac{4}{\pi^2}$ [1p]

Conclusie: $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{QR}$ staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$ [1p]

derde methode met behulp van een rechthoekige driehoek:
Analyse: gebruik Pythagoras. Als geldt $PQ^2 + QR^2 = PR^2$ dan staan PQ en QR loodrecht op elkaar.

De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$ [1p]

Dus lengte $PQ = QR = \sqrt{\left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2}$ *(Pythagoras)* en lengte $PR = 2\pi$ [1p]

Er moet gelden $PQ^2 + QR^2 = PR^2$ dus $\left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 = 4\pi^2$ dus $\left(\frac{2}{p}\right)^2 = \pi^2$ *(Pythagoras)*

$\dfrac{4}{p^2} = \pi^2$ dus als $p^2 = \dfrac{4}{\pi^2}$ [1p]

Conclusie: PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$ [1p]

vierde methode met behulp van twee rechthoekige driehoeken:
Analyse: driehoek PQR is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door Q. Als driehoek PQR rechthoekig is, dan moet gelden $|x_Q - x_P| = |y_Q - y_P|$.

De punten zijn $P(0, \frac{1}{p})$, $Q(\pi, -\frac{1}{p})$ en $R(2\pi, \frac{1}{p})$ [1p]

Driehoek PQR is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door Q. Als driehoek PQR rechthoekig is, dan moet gelden dat $|x_Q - x_P| = |y_Q - y_P|$.

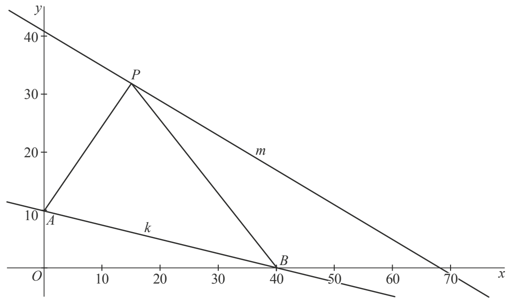
$|x_Q - x_P| = \pi$ dus $|y_Q - y_P| = \pi$ [1p] dus $\left|-\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}\right| = \pi$ [1p]

dus $\left|-\dfrac{2}{p}\right| = \pi$ dus $-\dfrac{2}{p} = \pi$ of $-\dfrac{2}{p} = -\pi$

Conclusie: PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $p = \dfrac{2}{\pi}$ of $p = -\dfrac{2}{\pi}$ [1p]

Driehoek met bewegend hoekpunt

5p **13** *Bereken, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: de punten A, B en P vormen géén driehoek als P op het snijpunt van de lijnen k en m ligt. Bereken de coördinaten van dit snijpunt. Stel de vergelijking van lijn k op.



eerste methode, m substitueren in k:

Lijn k gaat door $A(0, 10)$ en $B(40, 0)$,

dus $k: y = 10 - \frac{1}{4}x$ [1p]

De punten A, B en P vormen géén driehoek als P op het snijpunt van de lijnen k en m ligt. [1p]

$m: \begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$ substitueren in k geeft:

$30 - 3t = 10 - \frac{1}{4}(18 + 5t)$ [1p] dus $30 - 3t = 5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}t$ dus $t = 14$ [1p]

Conclusie: de gevraagde coördinaten van P zijn $(88, -12)$ [1p]

tweede methode, vergelijking van m opstellen:

Lijn k gaat door $A(0, 10)$ en $B(40, 0)$, dus $k: y = 10 - \frac{1}{4}x$ [1p]

De punten A, B en P vormen géén driehoek als P op het snijpunt van de lijnen k en m ligt. [1p]

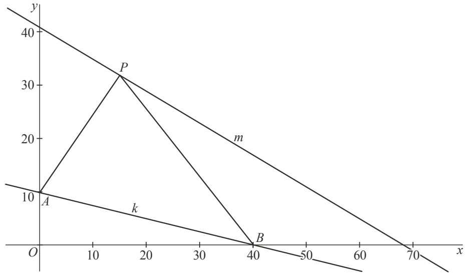
Omdat $m: \begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$ geldt voor lijn $m: y = -\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5}$ [1p]

Voor het snijpunt van k en m geldt: $10 - \frac{1}{4}x = -\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5}$ [1p] dus $\frac{7}{20}x = 30\frac{4}{5}$ dus $x = 88$

Conclusie: de gevraagde coördinaten van P zijn $(88, -12)$ [1p]

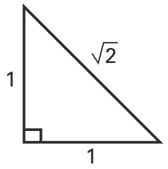
8p **14** *Onderzoek op algebraïsche wijze, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode met behulp van $1:1:\sqrt{2}$ driehoeken:
Analyse: gelijkbenig dus $|AP| = |BP|$.
Als bovendien de hoek bij P recht is, dan is driehoek ABP gelijkvormig met een driehoek met zijden 1, 1 en $\sqrt{2}$ (zie afbeelding), dus moet gelden $\sqrt{2} \cdot |AP| = |AB|$. Druk de coördinaten van P uit in t.
P heeft als coördinaten $(18 + 5t, 30 - 3t)$.



$A(0, 10)$ dus lengte $|AP| = \sqrt{(18+5t)^2 + (20-3t)^2}$

$B(40, 0)$ dus lengte $|BP| = \sqrt{(22-5t)^2 + (30-3t)^2}$



$|AP| = |BP|$ [1p] dus $\sqrt{(18+5t)^2 + (20-3t)^2} = \sqrt{(22-5t)^2 + (30-3t)^2}$ [1p] dus

$60t + 724 = -400t + 1384$ [1p] dus $t = \frac{33}{23}$ $(= 1{,}43...)$ [1p]

Lengte van AP (of BP) is dus $|AP| = \sqrt{\left(25\frac{4}{23}\right)^2 + \left(15\frac{16}{23}\right)^2} = \sqrt{880\frac{42}{529}}$ $(= 29{,}66...)$ [1p]

Lengte van $|AB| = \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{1700}$ $(= 41{,}23...)$ [1p]

Als de hoek bij P recht is, dan moet gelden $\sqrt{2} \cdot |AP| = |AB|$ maar

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{880\frac{42}{529}} \neq \sqrt{1700}$ (of $\sqrt{2} \cdot 29{,}66... \neq 41{,}23...$) [1p]

De hoek bij P is dus niet recht. [1p]
Conclusie: het gevraagde punt P bestaat niet.
Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met de drie stippen) en de 'is gelijk'-tekens (in plaats van 'ongeveer'-tekens) is toegestaan.

tweede methode met behulp van vectoren en inproduct:
Analyse: loodrecht dus inproduct = 0. Gelijkbenig dus $|AP| = |BP|$. Druk de coördinaten van P uit in t.
P heeft als coördinaten $(18 + 5t, 30 - 3t)$.

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 18+5t \\ 20-3t \end{pmatrix}$ [1p] en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -22+5t \\ 30-3t \end{pmatrix}$ [1p]

Loodrecht als $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ dus als $(18+5t) \cdot (-22+5t) + (20-3t) \cdot (30-3t) = 0$ [1p]
dus $34t^2 - 170t + 204 = 0$ dus $t^2 - 5t + 6 = 0$ dus $(t-3)(t-2) = 0$ [1p]
$t = 2$ geeft $P(28, 24)$ [1p] en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$ [1p]
In geval $t = 2$ en $P(28, 24)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$ en
lengte $|BP| = \sqrt{12^2 + 24^2} = \sqrt{720}$

In geval $t = 3$ en $P(33, 21)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{33^2 + 11^2} = \sqrt{1210}$ en
lengte $|BP| = \sqrt{7^2 + 21^2} = \sqrt{490}$ [1p]
Conclusie: in beide gevallen geldt $|AP| \neq |BP|$, dus het gevraagde punt P bestaat niet. [1p]
Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met drie stippen) is toegestaan.

derde methode met behulp van diagonalen:
Analyse: als hoek APB een rechte hoek is én $|AP| = |BP|$, dan zijn A, B en P de hoekpunten van een vierkant APBC. Dan is AB een diagonaal. Punt P moet dan op de andere diagonaal liggen én tegelijkertijd op lijn m liggen. De diagonalen van een vierkant snijden elkaar loodrecht middendoor. [1p]
$A(0, 10)$ en $B(40, 0)$. Het midden van AB is het punt $M(20, 5)$ [1p]

Omdat $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$ [1p] geldt $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ en dus $P(25, 25)$ [1p]

P ligt op m en heeft dus als coördinaten $(18 + 5t, 30 - 3t)$ [1p]
Dus moet gelden $18 + 5t = 25$ en tegelijkertijd $30 - 3t = 25$.

$18 + 5t = 25$ geeft $t = \frac{7}{5}$ én $30 - 3t = 25$ geeft $t = \frac{5}{3}$ [2p]

Conclusie: het gevraagde punt P bestaat niet. [1p]

vierde methode met behulp van cirkel en Thales:
Analyse: stel de vergelijking op van de cirkel met middellijn AB. Snijpunt cirkel en lijn m is een mogelijk punt P. Controleer of $|AP| = |BP|$.
Cirkel c met middellijn AB heeft middelpunt $M(20, 5)$ en straal $r = \sqrt{425}$ dus geldt
$c: (x-20)^2 + (y-5)^2 = 425$ [1p] en er moet gelden $\angle APB = 90°$ dus P ligt op deze cirkel (Thales). [1p]
Snijden cirkel c met lijn m geeft $(18 + 5t - 20)^2 + (30 - 3t - 5)^2 = 425$
dus $34t^2 - 170t + 204 = 0$ dus $t^2 - 5t + 6 = 0$ dus $(t-3)(t-2) = 0$ [2p]
$t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$. [1p]
In geval $t = 2$ en $P(28, 24)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$ en
lengte $|BP| = \sqrt{12^2 + 24^2} = \sqrt{720}$ [1p]
In geval $t = 3$ en $P(33, 21)$ dan lengte $|AP| = \sqrt{33^2 + 11^2} = \sqrt{1210}$ en
lengte $|BP| = \sqrt{7^2 + 21^2} = \sqrt{490}$ [1p]
Conclusie: in beide gevallen geldt $|AP| \neq |BP|$, dus het gevraagde punt P bestaat niet. [1p]
Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met drie stippen) is toegestaan.

vijfde methode met behulp van middelloodlijn:
Analyse: $|AP| = |BP|$ dus P ligt op middelloodlijn van AB. P ligt mogelijk op snijpunt middelloodlijn en lijn m. Controleer of $\angle APB = 90°$.

Het midden van AB is $M(20, 5)$ en richtingscoëfficiënt $AB = -\frac{1}{4}$ [1p]

Middelloodlijn heeft dus richtingscoëfficiënt 4 dus $y = 4x + b$
$M(20, 5)$ invullen levert $y = 4x - 75$ (of $y - 5 = 4(x - 20)$) [1p]

Snijden met lijn $m: \begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$ geeft $30 - 3t = 4(18 + 5t) - 75$ [1p]

Dus $t = \frac{33}{23}$ $(t = 1{,}43...)$ dus $P(25\frac{4}{23}, 25\frac{16}{23})$ (of $P(25{,}17...; 25{,}69...)$ [1p]

$|AP| = |BP|$ en als $\angle APB = 90°$ dan geldt $(AP)^2 + (BP)^2 = (AB)^2$

$AP^2 + BP^2 = \left(25\frac{4}{23}\right)^2 + \left(25\frac{16}{23}\right)^2 = 880\frac{42}{529}$ $(= 880{,}07...)$ [1p]

$AB^2 = 10^2 + 40^2 = 1700$ [1p]
Dus $(AP)^2 + (BP)^2 \neq (AB)^2$ [1p]
Conclusie: het gevraagde punt P bestaat niet. [1p]
Opmerking: 'algebraïsch', dus het gebruik van de niet-afgeronde decimale breuken (met de drie stippen) en de 'is gelijk'-tekens (in plaats van 'ongeveer'-tekens) is toegestaan.

Afgeknotte paraboloïde

7p **15** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*

eerste methode, druk V en A uit in a en b:

Analyse: bereken de inhoud, dus gebruik $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$. Genoemd wordt $h \cdot A$, dus bepaal ook h en oppervlakte A.

Inhoud V van de afgeknotte paraboloïde: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_a^b (\sqrt{x})^2\,dx$ [1p] $= \pi \cdot \int_a^b x\,dx =$
$\pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$ [1p] $= \pi \cdot (\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$ [1p]
Hoogte h van afgeknotte paraboloïde is afstand tussen b en a dus $h = b - a$
Oppervlakte cirkel: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m$

m is het midden van a en b dus $m = \frac{b+a}{2}$ [1p] dus $A = \pi \cdot m = \pi \cdot \frac{b+a}{2}$ [1p]
$h = b - a$ [1p] en $A = \pi \cdot \frac{b+a}{2}$ dus $h \cdot A = (b-a) \cdot \pi \cdot \frac{b+a}{2}$

Uitwerken levert: $(b-a) \cdot \pi \cdot \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (b-a) \cdot (b+a) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (b^2 + ab - ab - a^2)$
$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (b^2 - a^2) = \pi \cdot (\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$ [1p]
Conclusie: $V = h \cdot A$.

tweede methode, druk V en A uit in m en h:

Analyse: bereken de inhoud, dus gebruik $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$. Genoemd wordt $h \cdot A$, dus bepaal ook h en oppervlakte A.

Inhoud van de afgeknotte paraboloïde: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$ met $b = m + \frac{1}{2}h$ en $a = m - \frac{1}{2}h$ [1p]

Dus $V = \pi \int_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} (f(x))^2\,dx = \pi \int_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} (\sqrt{x})^2\,dx$ [1p] $= \pi \int_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h} x\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{m-\frac{1}{2}h}^{m+\frac{1}{2}h}$ [1p]
$= \frac{1}{2}\pi \cdot ((m + \frac{1}{2}h)^2 - (m - \frac{1}{2}h)^2)$ [1p]
Uitwerken levert: $V = \frac{1}{2}\pi \cdot ((m^2 + mh + \frac{1}{4}h^2) - (m^2 - mh + \frac{1}{4}h^2)) = \frac{1}{2}\pi \cdot (2mh) = \pi mh$ [1p]
Oppervlakte cirkel: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m$ [1p] dus $h \cdot A = h \cdot \pi \cdot m$ [1p]
Conclusie: $V = h \cdot A$.

©ThiemeMeulenhoff

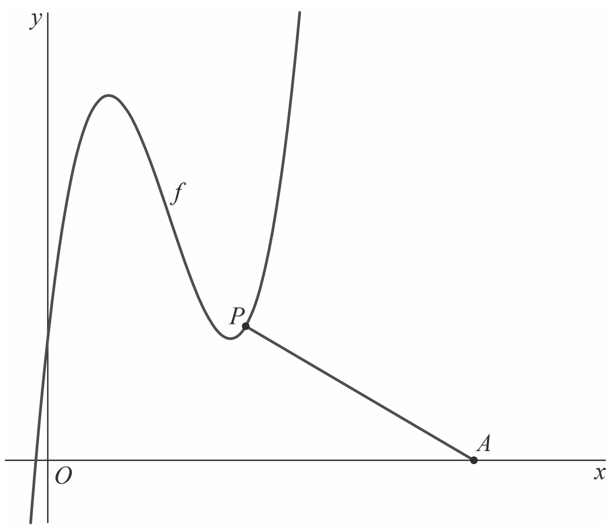
Examen 2019-II

Minimale lengte

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x(x-3)^2 + 2$. Op de grafiek van f ligt het punt P. Verder is gegeven het punt A (7, 0). Zie de figuur.

De lengte van lijnstuk AP hangt af van de positie van P. In de figuur is P zó gekozen dat de lengte van lijnstuk AP minimaal is.

figuur



4p **1** Bereken deze minimale lengte. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Bewegend punt

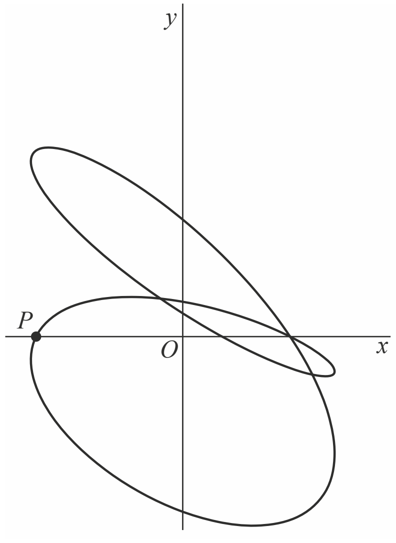
De beweging van een punt P wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) \\ y(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Op verschillende tijdstippen bevindt P zich op de x-as. Op een van die tijdstippen bevindt P zich links van de y-as.
Zie figuur 1, waarin de positie van P op dit tijdstip is aangegeven.

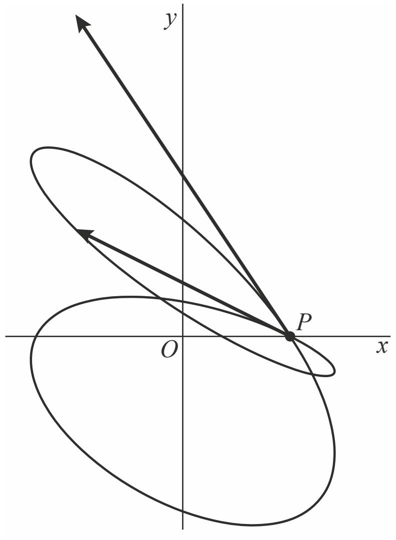
4p **2** Bereken exact de x-coördinaat van P op dit tijdstip.

figuur 1



Op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$ bevindt P zich in hetzelfde punt. Dit punt is met een stip aangegeven in figuur 2.
Ook zijn de snelheidsvector van P op tijdstip $t = 0$ en de snelheidsvector van P op tijdstip $t = \pi$ aangegeven.

figuur 2



6p **3** Bereken algebraïsch de hoek in graden tussen deze twee snelheidsvectoren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

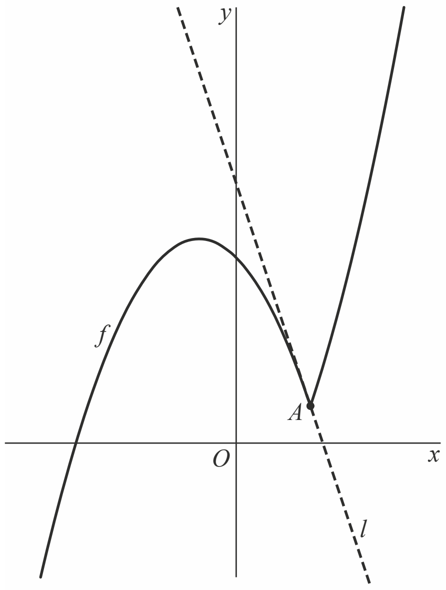
Raaklijn in knikpunt

De functie f wordt gegeven door:

$f(x) = |x - 2| \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 1$

De grafiek van f heeft een knik in het punt A. Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen. De lijn l is de raaklijn in A aan het linkerdeel van de grafiek. Zie de figuur.

figuur

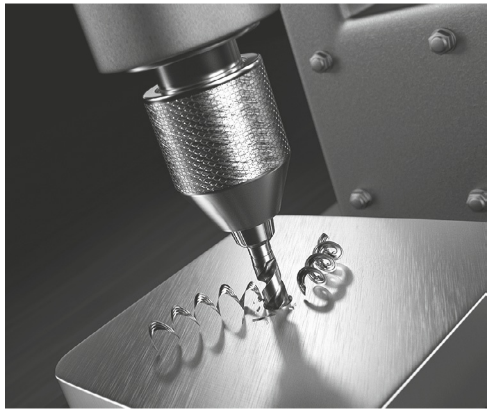


5p **4** Stel op exacte wijze een vergelijking van lijn l op.

Optimale snijsnelheid

In de metaalindustrie worden met een boormachine gaten in harde materialen geboord. Zie de foto.

foto



De levensduur van een boor is afhankelijk van de **(snij)snelheid**: dit is de snelheid waarmee de buitenkant van de boor door het metaal snijdt. Bij een hoge snelheid zal de boor snel slijten waardoor de levensduur kort is.

Rond 1900 stelde F.W. Taylor het volgende verband vast:

$V \cdot T^m = C$

Hierin is:
- V de (snij)snelheid van de boor (in meter per minuut (m/min)) (V ligt vaak tussen de 5 en 150 m/min),
- T de levensduur (in minuten),
- m een constante die afhangt van het materiaal waarvan de boor is gemaakt,
- C een constante die afhangt van het materiaal waarin wordt geboord.

De waarden van m en C worden experimenteel bepaald. De resultaten van een meting in een bepaalde situatie zijn:
- Bij een snelheid van 20 m/min is de levensduur 116 minuten.
- Bij een snelheid van 30 m/min is de levensduur 40 minuten.

4p **5** Bereken algebraïsch de waarden van m en C in deze situatie. Geef m in twee decimalen en C als geheel getal.

In een fabriek boort één boormachine 24 uur per dag dezelfde soort gaten. Het is belangrijk de snelheid van de boor goed in te stellen: een hoge snelheid betekent dat het boren van een gat minder tijd kost. Maar daar staat tegenover dat de boor sneller vervangen moet worden.
Men wil berekenen bij welke snelheid V het aantal geboorde gaten A per 24 uur maximaal is.

Om A uit te kunnen drukken in V doen we de volgende aannames:

a Het aantal gaten N dat in één minuut geboord kan worden, is recht evenredig met de snelheid V van de boor. Bij een snelheid van 20 m/min boort deze boor 6 gaten in één minuut.

b Met behulp van de formule van Taylor is te berekenen na hoeveel minuten boren de boor vervangen moet worden. Voor het boorproces in deze fabriek geldt $C = 150$ en $m = 0{,}25$, dus $V \cdot T^{0{,}25} = 150$.

c Het vervangen van een boor kost telkens 2 minuten. De boormachine is dus maar een deel van de tijd bezig met boren.
Voor dit deel d geldt: $d = \dfrac{T}{T+2}$

d Voor het aantal geboorde gaten A per 24 uur geldt: $A = 1440 \cdot N \cdot d$

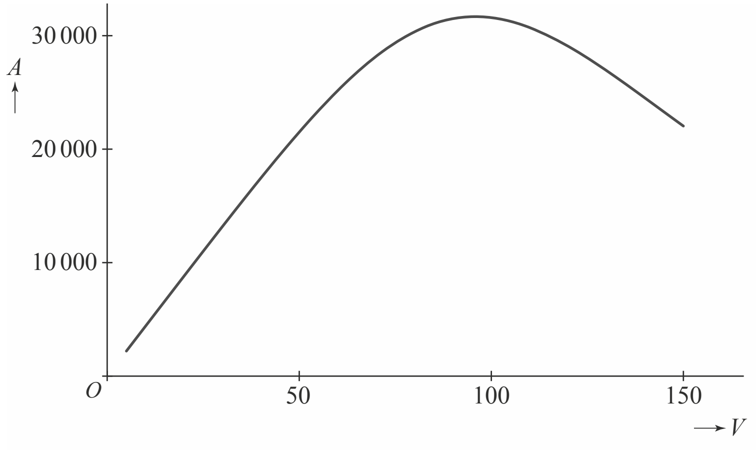
Met de aannames a, b, c en d kun je voor A de volgende formule opstellen:

$$A = \dfrac{432V}{\dfrac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$$

5p **6** Leid deze formule voor A af uit de aannames a, b, c en d.

In de figuur is de grafiek van A weergegeven voor $5 \leq V \leq 150$.

figuur



Uit de grafiek blijkt dat er een snelheid is waarbij het aantal geboorde gaten per 24 uur maximaal is.

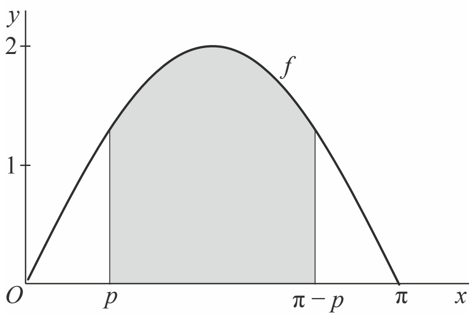
5p **7** Bereken algebraïsch deze snelheid in m/min. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Oppervlakte onder een sinusgrafiek

De functie f met domein $[0, \pi]$ wordt gegeven door $f(x) = 2\sin(x)$.

We bekijken het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van f, de x-as, de lijn met vergelijking $x = p$ en de lijn met vergelijking $x = \pi - p$. Hierin is $0 < p < \frac{1}{2}\pi$. In figuur 1 is dit gebied grijs. De oppervlakte van het gebied is $A(p)$.

figuur 1

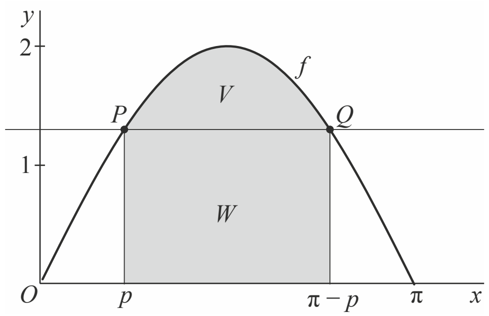


Er geldt: $A(p) = 4\cos(p)$.

4p **8** Bewijs dat deze formule voor $A(p)$ juist is.

De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt P.
De lijn met vergelijking $x = \pi - p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De horizontale lijn door P en Q verdeelt het grijze gebied in twee delen. Het deel boven deze lijn is V, het deel onder deze lijn is W. Zie figuur 2.

figuur 2



Er is één waarde van p waarvoor de oppervlakten van V en W aan elkaar gelijk zijn.

4p **9** Bereken deze waarde van p. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

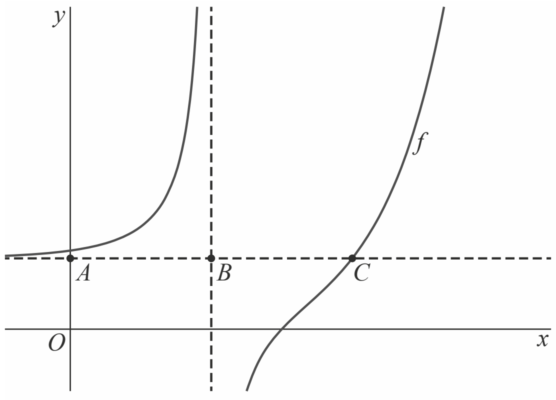
Horizontale en verticale asymptoot

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10}$$

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot en een verticale asymptoot. In de figuur is de grafiek van f met de beide asymptoten weergegeven. De twee asymptoten snijden elkaar in het punt B.
Het punt A is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de y-as.
Het punt C is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de grafiek van f.

figuur



7p **10** Bewijs dat B het midden is van lijnstuk AC.

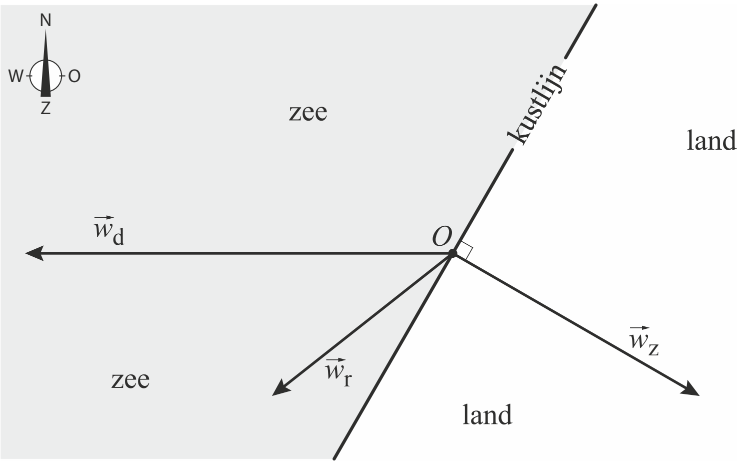
Wind aan zee

Wind heeft een richting en een snelheid. Daarom kan wind als een vector worden weergegeven. In de figuren bij deze opgave wordt een wind met een snelheid van 1 m/s weergegeven als een vector van 1 cm.

Op een warme zomerdag worden aan de kust de windrichting en de windsnelheid door twee processen bepaald:
- de luchtstroming van een gebied met hoge luchtdruk naar een gebied met lage luchtdruk: dit is wind $\vec{w}_d$.
- de luchtstroming die ontstaat doordat de temperatuur boven zee anders is dan boven land: dit is wind $\vec{w}_z$. We gaan er in deze opgave van uit dat deze wind loodrecht op de kustlijn staat en richting het land waait.

In figuur 1 is een voorbeeldsituatie getekend waarbij wind $\vec{w}_d$ in westelijke richting waait.

figuur 1



De resulterende wind $\vec{w}_r$ is de wind zoals die wordt ervaren door iemand die zich aan de kust in punt *O* bevindt. Er geldt: $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$.

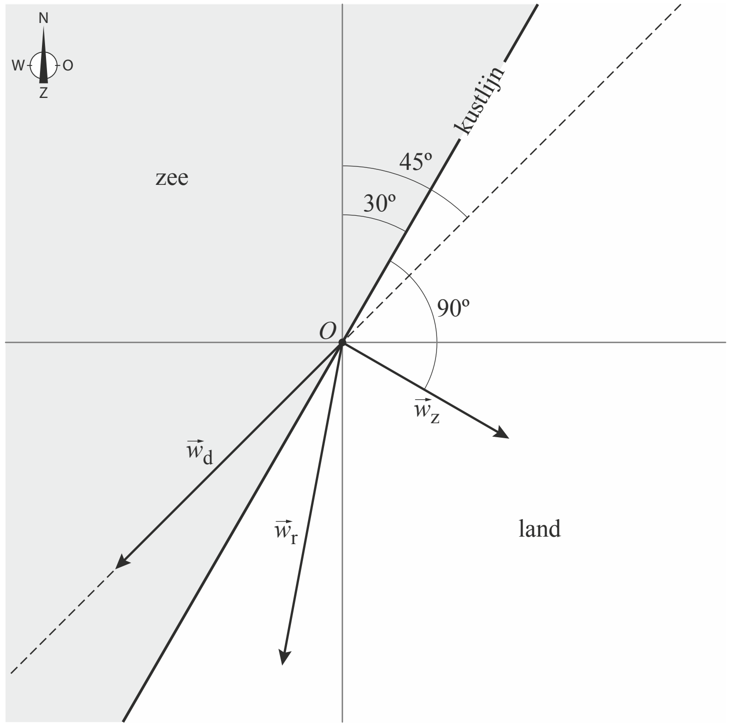
Op de uitwerkbijlage achteraan dit examen is een deel van een kust getekend. Er geldt:
- De wind $\vec{w}_z$ waait met een snelheid van 4 m/s landinwaarts.
- De wind $\vec{w}_d$ waait met een snelheid van 6 m/s.
- De resulterende wind $\vec{w}_r$ waait evenwijdig met de kustlijn.

Op basis van bovenstaande drie gegevens zijn er twee mogelijkheden voor $\vec{w}_d$.

4p **11** Teken op de uitwerkbijlage deze twee vectoren $\vec{w}_d$. Neem daarbij punt *O* als beginpunt van $\vec{w}_d$. Licht je aanpak toe.

Op een plek langs de Nederlandse kust (in figuur 2 het punt *O*) maakt de kustlijn een hoek van 30° met het noorden. Op zekere dag waait de wind $\vec{w}_d$ met een snelheid van 5 m/s in zuidwestelijke richting. De wind $\vec{w}_z$ heeft een snelheid van 3 m/s en staat loodrecht op de kustlijn.
In figuur 2 zijn de lijn noord-zuid en de lijn oost-west de assen van het assenstelsel. De lijn door *O* waar vector $\vec{w}_d$ op ligt, is gestippeld getekend; die maakt dus een hoek van 45° met het noorden. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage achteraan dit examen.

figuur 2



5p **12** Bereken algebraïsch de snelheid in m/s van de resulterende wind. Geef je eindantwoord in één decimaal. Je kunt bij deze vraag de uitwerkbijlage gebruiken.

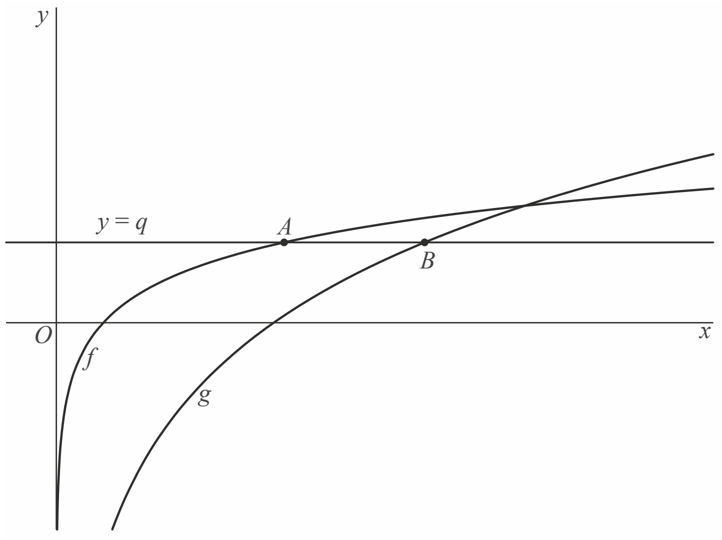
Twee logaritmische functies

De functies f en g worden gegeven door:

$f(x) = \log(\sqrt{x})$ en $g(x) = \log(x\sqrt{x}) - 1$

De lijn met vergelijking $y = q$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. Zie figuur 1.

figuur 1

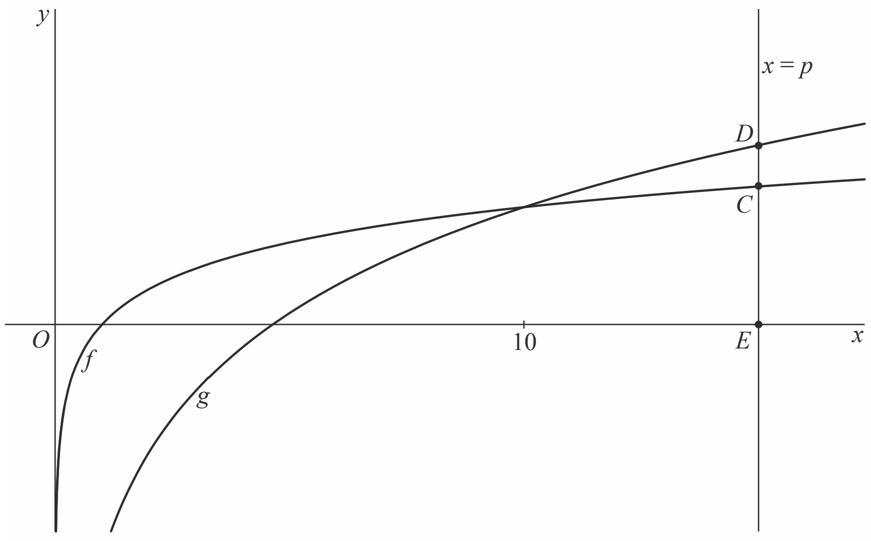


Er zijn waarden van q waarvoor A links van B ligt en de lengte van lijnstuk AB gelijk is aan 3.

4p **13** Bereken deze waarden van q. Geef je eindantwoorden in twee decimalen.

Het snijpunt van de twee grafieken ligt bij $x = 10$.
Gegeven is $p > 10$. De lijn met vergelijking $x = p$ ligt dan rechts van het snijpunt van de twee grafieken.
De lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt C, de grafiek van g in het punt D en de x-as in het punt E.
Doordat $p > 10$, ligt D boven C. Zie figuur 2.

figuur 2



De verhouding tussen de lengte van lijnstuk CD en de lengte van lijnstuk CE hangt af van p. Er geldt:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$$

3p **14** Bewijs dat deze formule voor $\frac{CD}{CE}$ juist is.

Als p onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding $\frac{CD}{CE}$ tot een grenswaarde.

2p **15** Bereken exact deze grenswaarde.

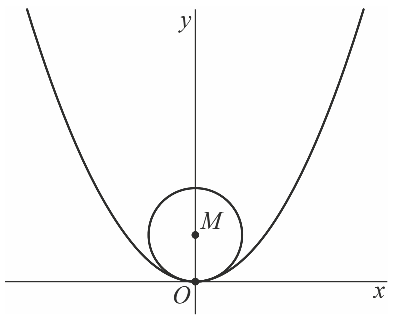
Parabool en cirkel met variabele straal

Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$ en een punt M (0, r) op de positieve y-as. We bekijken de cirkel met middelpunt M en straal r. Het punt O (0, 0) ligt op deze cirkel en op de gegeven parabool.

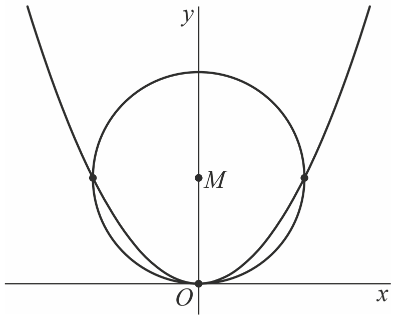
Afhankelijk van de waarde van r hebben de cirkel en de parabool één gemeenschappelijk punt of drie gemeenschappelijke punten.

In figuur 1 is de situatie met $r = \frac{9}{20}$ getekend, waarbij er één gemeenschappelijk punt is. In figuur 2 is de situatie met $r = 1$ getekend, met drie gemeenschappelijke punten.

figuur 1 $r = \frac{9}{20}$



figuur 2 $r = 1$

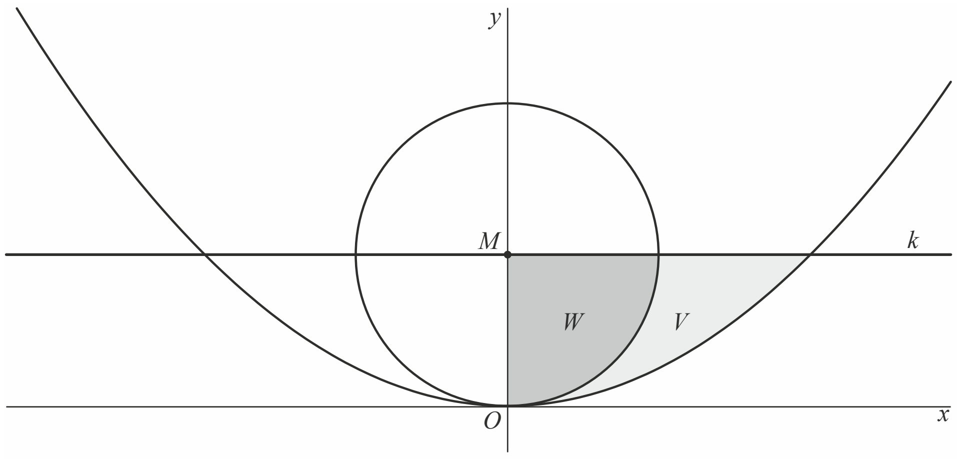


5p **16** Bereken exact voor welke waarden van r de cirkel en de parabool drie gemeenschappelijke punten hebben.

In de rest van deze opgave gaan we uit van de situatie waarin de cirkel en de parabool alleen punt O gemeenschappelijk hebben.

De lijn k gaat door M en is evenwijdig aan de x-as.
V is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de cirkel, de parabool en lijn k. In figuur 3 is dit gebied lichtgrijs gemaakt.
W is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de cirkel, de y-as en lijn k. In figuur 3 is dit gebied donkergrijs gemaakt.

figuur 3



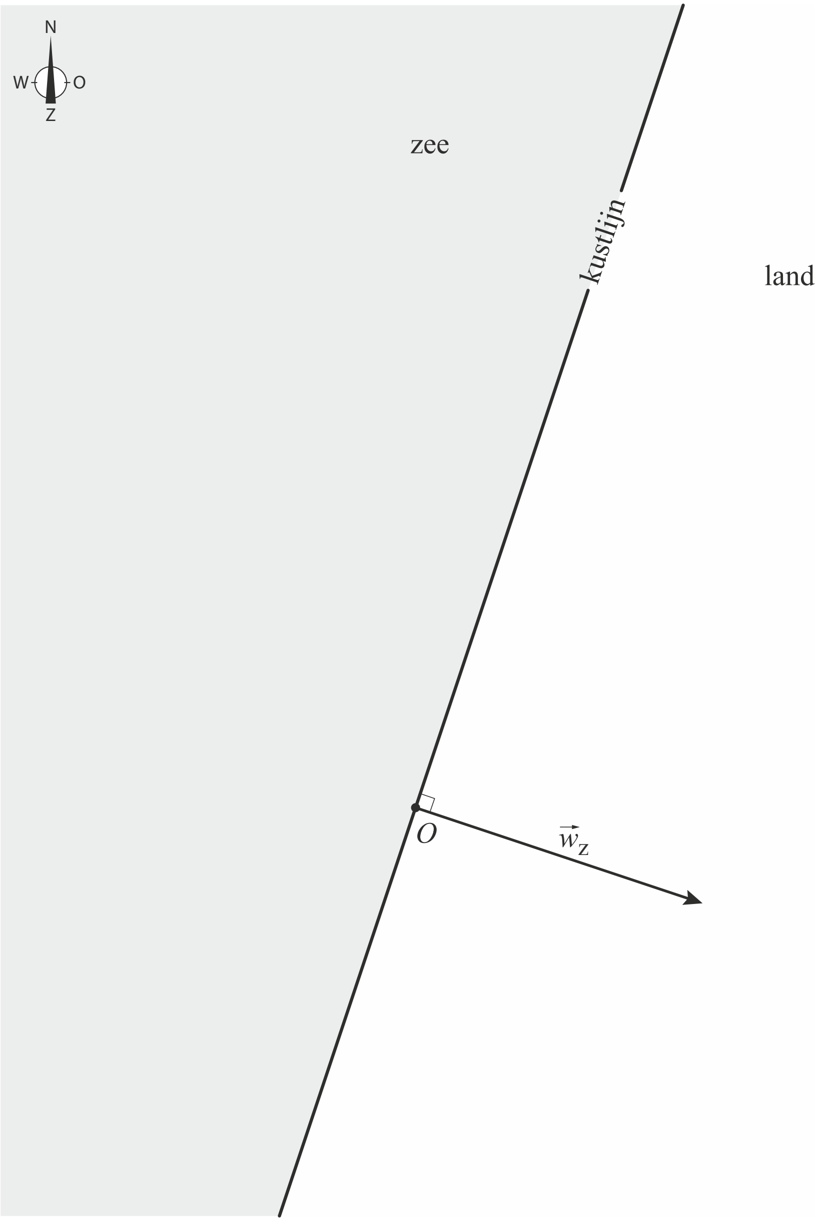
Wanneer de cirkel wordt gewenteld om de y-as, ontstaat een bol met inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De gebieden V en W worden gewenteld om de y-as.
Er is een waarde van r waarvoor de inhoud van de omwentelingslichamen van V en W aan elkaar gelijk zijn.

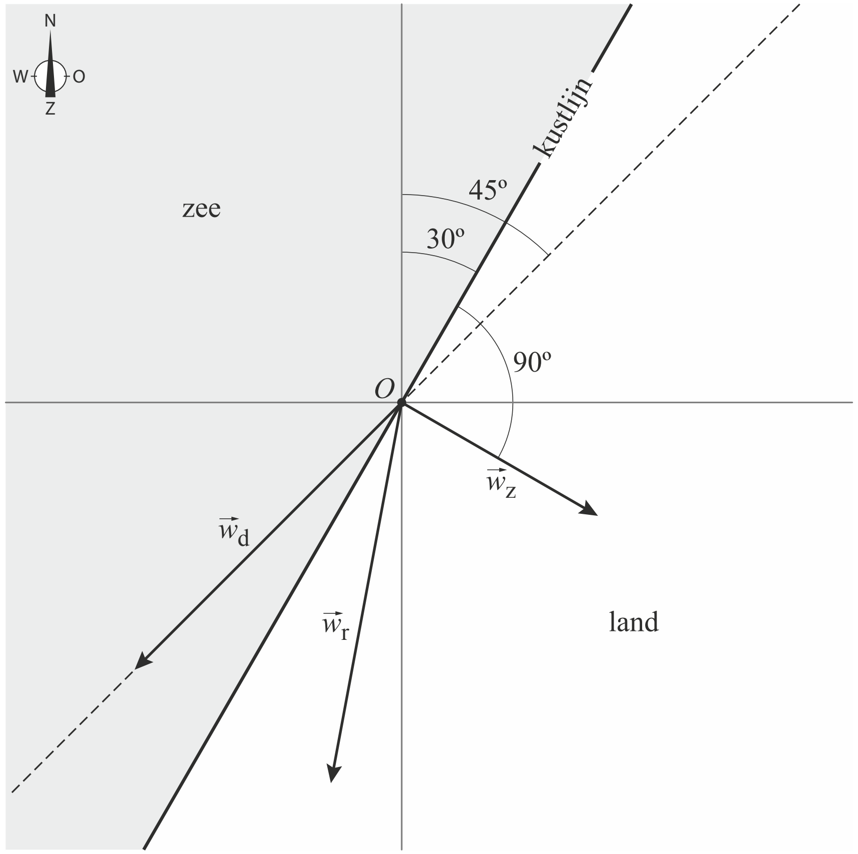
5p **17** Bereken exact deze waarde van r.

Uitwerkbijlage bij de vragen 11 en 12

11



12



Hints bij examen 2019-II

1 Lengte, dus denk aan Pythagoras. De grafische rekenmachine is toegestaan, dus afgeleide = 0 is niet nodig.

2 Snijden met de x-as, dus $y(t) = 0$. Denk aan de formules goniometrie.

3 Bereken snelheidsvectoren met behulp van $x'(t)$ en $y'(t)$. Denk aan het inproduct.

4 Absoluutstrepen, knikpunt bij $x = 2$. Splits in twee formules zonder absoluutstrepen door middel van $x - 2$ en $-x + 2$.

5 Gegeven zijn de formule voor C en twee combinaties van V en T. Dit levert twee vergelijkingen met twee onbekenden op. Hiermee kunnen de waarden van m en C berekend worden.

6 In de gevraagde formule zijn A en V de variabelen, dus N en d uitdrukken in V. Ga uit van de formule $A = 1440 \cdot N \cdot d$.

7 Maximaal, top, dus afgeleide = 0. Let op gebruik van de quotiëntregel.

8 Oppervlakte, dus gebruik $\int_p^{\pi-p} f(x)\,dx$.
Herleid de uitkomst door gebruik te maken van $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

9 Oppervlaktes van V en W zijn even groot, dus $Opp_V = Opp_W$ en $A(p) = Opp_V + Opp_W$.

10 Genoemd worden de horizontale asymptoot, de verticale asymptoot en punt B. Bereken eerst deze asymptoten en punt B. Let op: horizontale asymptoot alleen als $x \to -\infty$.

11 Er moet gelden $\vec{w}_z + \vec{w}_d = \vec{w}_r$.
$\vec{w}_d$ heeft lengte 6, dus het eindpunt van $\vec{w}_d$ ligt op een cirkel met straal 6.

12 De hoeken van $\vec{w}_z$ en $\vec{w}_d$ met de positieve x-as zijn bekend, dus $\vec{w}_z$ en $\vec{w}_d$ kunnen opgesteld worden.

13 De x-coördinaat van A noemen we a, en de x-coördinaat van B noemen we b, dan geldt $a + 3 = b$ dus moet gelden $q = f(a) = g(a + 3)$. Bereken, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.

14 D ligt op g, dus $D(p, \ln(p\sqrt{p}) - 1)$. Noteer CD en CE. Er geldt $CD = DE - CE$.

15 Gebruik het resultaat van de vorige opgave. Herschrijf het gegeven quotiënt.

16 Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt $(0, r)$ en straal r en bereken de snijpunten met de parabool.

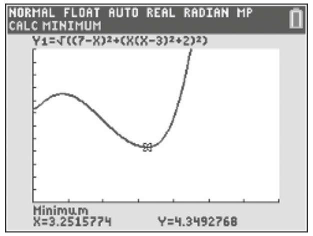
17 Gebruik $\int_{y_O}^{y_M} (\pi x^2)\,dy =$

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2019-II

Minimale lengte

4p **1** *Bereken in twee decimalen nauwkeurig, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: lengte, dus denk aan Pythagoras. Minimaal, dus denk aan afgeleide = 0.
P heeft als coördinaten $(x, x(x-3)^2 + 2)$ en $A(7, 0)$.



Afstand tussen P en A is $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(7-x)^2 + (0 - (x(x-3)^2 + 2))^2}$. [2p]
Minimale afstand van d berekenen met de grafische rekenmachine.
$y_1 = \sqrt{(7-x)^2 + (x(x-3)^2 + 2)^2}$ calc minimum geeft $x = 3{,}25\ldots$ en $y = 4{,}34\ldots$ [1p]
Conclusie: de minimale lengte is 4,35. [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen. Omdat het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan, is verder herleiden van afstand d niet nodig. In dit geval is differentiëren en de vergelijking afgeleide = 0 oplossen niet nodig.

Bewegend punt

4p **2** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: snijden met de x-as, dus y(t) = 0. Denk aan de formules goniometrie, bijlage bij het examen, zie ook de bijlage formuleblad in deze examenbundel.

eerste methode, met behulp van sin(A) = sin(B):
$y(t) = 0$ dus $\sin(2t) = \sin(t)$ [1p]
Dus $2t = t + 2k\pi$ of $2t = \pi - t + 2k\pi$ [1p]
Dus $t = 2k\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi$
Dus (op het gegeven domein geldt) $t = 0$, $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{2}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ [1p]
$x(0) = 1$, $x(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x(\pi) = 1$, $x(1\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x(2\pi) = 1$
Conclusie: x-coördinaat van het getekende punt P is $x(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ [1p]

tweede methode, met behulp van sin(2t) = 2 sin(t) cos(t):
$y(t) = \sin(2t) - \sin(t) = 2\sin(t)\cos(t) - \sin(t)$ [1p]
$y(t) = 0$ dus $2\sin(t)\cos(t) - \sin(t) = 0$ dus $\sin(t) \cdot (2\cos(t) - 1) = 0$
Dus $\sin(t) = 0$ of $2\cos(t) - 1 = 0$
Dus $\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = \frac{1}{2}$ [1p]
Dus $t = k\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ of $t = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi$
Dus (op het gegeven domein geldt) $t = 0$, $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{2}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ [1p]
$x(0) = 1$, $x(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x(\pi) = 1$, $x(1\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x(2\pi) = 1$
Conclusie: x-coördinaat van P is $x(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ [1p]

©ThiemeMeulenhoff

6p **3** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
eerste methode, met behulp van de hoek tussen de snelheidsvectoren:

Analyse: bereken eerst de snelheidsvectoren met behulp van x′(t) en y′(t). Gebruik de tijdstippen t = 0 en t = π.
Bereken een hoek, dus denk aan het inproduct.
Afgeleide van $\cos(2t)$ is $-2\sin(2t)$ en afgeleide van $\sin(2t)$ is $2\cos(2t)$.

Dus afgeleide van $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) \\ y(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases}$ is $\begin{cases} x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t) \\ y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t) \end{cases}$ [2p]

Voor $t = 0$ geldt $\begin{cases} x'(0) = -2\sin(0) - 2\cos(0) = -2 \\ y'(0) = 2\cos(0) - \cos(0) = 1 \end{cases}$ en voor

$t = \pi$ geldt $\begin{cases} x'(\pi) = -2\sin(2\pi) - 2\cos(2\pi) = -2 \\ y'(\pi) = 2\cos(2\pi) - \cos(\pi) = 3 \end{cases}$ [1p]

Dus hoek tussen de twee vectoren berekenen met $\cos(\varphi) = \dfrac{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{4+3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}}$

$= \dfrac{7}{\sqrt{65}}$ [2p]

Conclusie: $\varphi = 29{,}7°$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

tweede methode, met behulp van de richtingscoëfficiënten:

Analyse: richting, dus $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}$. *Bereken afgeleiden x′(t) en y′(t). Bereken een hoek, dus denk aan tan(α) = r.c.*
Afgeleide van $\cos(2t)$ is $-2\sin(2t)$ en afgeleide van $\sin(2t)$ is $2\cos(2t)$.
Dus afgeleide van $x(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$ is $x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$ [1p]
en afgeleide van $y(t) = \sin(2t) - \sin(t)$ is $y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$. [1p]

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2\cos(2t) - \cos(t)}{-2\sin(2t) - 2\cos(2t)}$

Voor $t = 0$ geldt $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(0)}{x'(0)} = \dfrac{2\cos(0) - \cos(0)}{-2\sin(0) - 2\cos(0)} = -\dfrac{1}{2}$ en

voor $t = \pi$ geldt $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(\pi)}{x'(\pi)} = \dfrac{2\cos(2\pi) - \cos(\pi)}{-2\sin(2\pi) - 2\cos(2\pi)} = -\dfrac{3}{2}$ [1p]

De richtingshoeken zijn $\tan(\varphi_1) = -\dfrac{1}{2}$ dus $\varphi_1 = -26{,}56...°$ [1p] en $\tan(\varphi_2) = -\dfrac{3}{2}$ dus $\varphi_2 = -56{,}30...°$ [1p]
Conclusie: $\varphi = -26{,}56...° - -56{,}30...° \approx 29{,}7°$ [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

Raaklijn in knikpunt

5p **4** *Op exacte wijze, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: absoluutstrepen, knikpunt bij x = 2. Schrijf de formule zonder absoluutstrepen. Vervang het deel met absoluutstrepen één keer door (x – 2) en één keer door (–x + 2) met bijbehorende domeinen. Bepaal het functievoorschrift van het linkerdeel van de grafiek.

$|x-2| = x-2$ voor $x - 2 \geq 0$ dus voor $x \geq 2$

$|x-2| = -x+2$ voor $x \leq 2$

Dus $f(x) = (x-2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$ als $x \geq 2$ (rechterdeel) en

$f(x) = (-x+2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$ als $x \leq 2$ (linkerdeel) [1p] *(controleer met een plot)*

Knikpunt als $x = 2$ en $f(2) = 1$ dus $A(2, 1)$ [1p]

Voor het linkerdeel van de grafiek geldt $f(x) = (-x+2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - x + 5$.

Helling berekenen met $f'(x) = -x - 1$. [1p]
Voor de helling in $x = 2$ van het linkerdeel geldt $\lim\limits_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} (-x - 1) = -3$.

Vergelijking raaklijn is $l: y = -3x + b$ [1p] door $A(2, 1)$
Conclusie: vergelijking raaklijn is $l: y = -3x + 7$. [1p]

Opmerking: controleer $f(x) = (x-2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$ *als* $x \geq 2$ *en* $f(x) = (-x+2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$ *als* $x \leq 2$ *met een plot.*
Als de richtingscoëfficiënt is berekend met f′(2) = −3 in plaats van met een limiet, dan worden er geen scorepunten in mindering gebracht.

Optimale snijsnelheid

4p **5** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: gegeven zijn de formule voor C en twee combinaties van V en T. Invullen van deze twee combinaties in de formule voor C levert twee vergelijkingen met de twee onbekenden m en C op. Hiermee kunnen de waarden van m en C berekend worden.

$V \cdot T^m = C$ met $V = 20$ en $T = 116$ levert $20 \cdot 116^m = C$.

$V \cdot T^m = C$ met $V = 30$ en $T = 40$ levert $30 \cdot 40^m = C$.

Dus $20 \cdot 116^m = 30 \cdot 40^m$ [1p] dus $\dfrac{116^m}{40^m} = \dfrac{30}{20}$ dus $2{,}9^m = 1{,}5$ [1p] dus

$m = {}^{2,9}\log(1{,}5) = 0{,}380... \approx 0{,}38$ [1p]

$C = 20 \cdot 116^{0,380...} \approx 122{,}24...$ [1p]
Conclusie: $C \approx 122$ en $m \approx 0{,}38$
Opmerking: let op het aantal decimalen. Let op het gebruik van het =-teken bij 0,38... en het ≈-teken bij 0,38.

5p **6** *Leid af, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: in de gevraagde formule zijn A en V de variabelen, dus de variabelen N en d uitdrukken in V. Ga uit van de formule A = 1440 · N · d.
Gegeven zijn ook de formules $V \cdot T^m = C$ *(en hier zelfs* $V \cdot T^{0,25} = 150$*),* $A = 1440 \cdot N \cdot d$ *en* $d = \dfrac{T}{T+2}$.
Het aantal gaten N is recht evenredig met V en bij V = 20 worden en zes gaten geboord (per minuut).

Ga uit van aanname a, c en d: $A = 1440 \cdot N \cdot d$ *met N het aantal gaten en* $d = \dfrac{T}{T+2}$.

$N = c \cdot V$, want N is recht evenredig met V (aanname a). Omdat $V = 20$ en $N = 6$ geldt hier $N = 0{,}3 \cdot V$. [1p]
Dit substitueren in $A = 1440 \cdot N \cdot d$ geeft $A = 1440 \cdot 0{,}3 \cdot V \cdot d$.

$d = \dfrac{T}{T+2}$ (aanname c). Dit substitueren in $A = 1440 \cdot 0{,}3 \cdot V \cdot d$ geeft

$A = 1440 \cdot 0{,}3 \cdot V \cdot \dfrac{T}{T+2}$.

$V \cdot T^{0,25} = 150$ (aanname b). Druk T uit in V, dit geeft $T^{0,25} = \dfrac{150}{V}$ dus $T = \left(\dfrac{150}{V}\right)^4$ [1p]

Dit substitueren in $A = 1440 \cdot 0{,}3 \cdot V \cdot \dfrac{T}{T+2}$ geeft $A = 1440 \cdot 0{,}3 \cdot V \cdot \dfrac{\left(\frac{150}{V}\right)^4}{\left(\frac{150}{V}\right)^4 + 2}$ [1p]

Herschrijf $\dfrac{\left(\frac{150}{V}\right)^4}{\left(\frac{150}{V}\right)^4+2} = \dfrac{\frac{150^4}{V^4}}{\frac{150^4}{V^4}+2} = \dfrac{\frac{150^4}{V^4}}{\frac{150^4}{V^4}+2} \cdot \dfrac{V^4}{V^4}$ *(ga na waarom hier met $\frac{V^4}{V^4}$ vermenigvuldigd wordt)*

$\dfrac{150^4}{150^4+2\cdot V^4} = \dfrac{150^4}{150^4+2\cdot V^4} \cdot \dfrac{\frac{1}{150^4}}{\frac{1}{150^4}} = \dfrac{1}{1+\frac{2\cdot V^4}{150^4}}$ [1p] *(ga na waarom hier met $\frac{\frac{1}{150^4}}{\frac{1}{150^4}}$ vermenigvuldigd wordt)*

Dus $A = 1440 \cdot 0{,}3 \cdot V \cdot \dfrac{1}{1+\frac{2\cdot V^4}{150^4}} = \dfrac{432\,V}{\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1}$

Conclusie: $A = \dfrac{432\,V}{\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1}$ [1p]

Opmerking: het resultaat van deze opgave kan gebruikt worden bij de volgende opgave.

5p **7** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: maximaal, top, dus afgeleide = 0. Let op gebruik van de quotiëntregel.

Gegeven is $A = \dfrac{432\,V}{\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1}$ met teller $t = 432\,V$ en dus $t' = 432$ en noemer

$n = \dfrac{2}{150^4}\cdot V^4+1$ en dus $n' = 4\cdot\dfrac{2}{150^4}\cdot V^3$ [1p]

Dus $A' = \dfrac{432\cdot\left(\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1\right) - 432\,V\cdot 4\cdot\frac{2}{150^4}\cdot V^3}{\left(\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1\right)^2}$

$= \dfrac{432\cdot\left(\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1\right) - 1728\cdot\frac{2}{150^4}\cdot V^4}{\left(\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1\right)^2}$ [1p] *(quotiëntregel)*

Top als teller is 0, dus als $432\cdot\left(\frac{2}{150^4}\cdot V^4+1\right) - 1728\cdot\frac{2}{150^4}\cdot V^4 = 0$ [1p] dus als

$\dfrac{864}{150^4}\cdot V^4 + 432 - \dfrac{3456}{150^4}\cdot V^4 = 0$

dus als $\dfrac{2592}{150^4}\cdot V^4 = 432$ dus als $V^4 = 432\cdot\dfrac{150^4}{2592} = 84\,375\,000$ dus

$V = \pm\sqrt[4]{84\,375\,000} \approx \pm 95{,}84\ldots$ [1p]

Conclusie: $V = 95{,}8$ [1p] ($V = -95{,}8$ vervalt)

Opmerking: in plaats van breuken mogen ook decimale breuken gebruikt worden bij de tussenberekeningen. Let op het aantal decimalen.

Oppervlakte onder een sinusgrafiek

4p **8** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik de formule $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.*
Analyse: oppervlakte, dus gebruik $\int_p^{\pi-p} f(x)\,dx$.

Primitieve van $2\sin(x)$ is $-2\cos(x)$.

Oppervlakte $= \int_p^{\pi-p} f(x)\,dx = \int_p^{\pi-p} 2\sin(x)\,dx$ [1p] $= [-2\cos(x)]_p^{\pi-p}$ [1p]

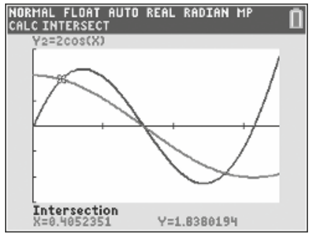
$= -2\cos(\pi-p) - -2\cos(p) = --2\cos(p) - -2\cos(p) = 4\cos(p)$ [1p]

Conclusie: $A(t) = 4\cos(p)$ [1p]

Opmerking: het resultaat van deze opgave kan gebruikt worden bij de volgende opgave.

4p **9** *Bereken, rond af op twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
Analyse: oppervlaktes van V en W zijn even groot, dus $Opp_V = Opp_W$. W is een rechthoek, dus oppervlakte W is te berekenen met lengte × breedte.

De oppervlaktes van V en W zijn even groot, dus $Opp_V = Opp_W$ en $A(p) = Opp_V + Opp_W$.
$4\cos(p) = Opp_V + Opp_W$ dus $4\cos(p) = 2\cdot Opp_W$ dus $Opp_W = 2\cos(p)$
Ook geldt $Opp_W = (\pi - p - p)\cdot 2\sin(p) = (\pi - 2p)\cdot 2\sin(p)$ [1p] *(oppervlakte rechthoek dus lengte × breedte)*
Dus opgelost moet worden $(\pi - 2p)\cdot 2\sin(p) = 2\cos(p)$, [1p]
oplossen met grafische rekenmachine.



$y_1 = (\pi - 2x)\cdot 2\sin(x)$

$y_2 = 2\cos(x)$ calc intersect levert $x \approx 0{,}41$ [1p]

(zie figuur 2, $x < \frac{1}{2}\pi$)

Conclusie: $p \approx 0{,}41$ [1p]

Opmerking: let op het aantal decimalen. Noteer altijd ook de vergelijking die opgelost moet worden.

Horizontale en verticale asymptoot

7p **10** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd worden de horizontale asymptoot, de verticale asymptoot en punt B. Bereken eerst deze asymptoten en punt B. Let op: horizontale asymptoot alleen als $x \to -\infty$. Genoemd worden ook de punten A en C. Bereken deze punten A en C. Bereken daarna het midden van A en C.

Gegeven $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1000}{e^x-10}$

Verticale asymptoot: $e^x - 10 = 0$ dus V.A.: $x = \ln(10)$ [1p]
Dus x-coördinaat van punt B is $\ln(10)$.

Horizontale asymptoot* van $f(x)$ berekenen met:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}-1000) = 0-1000 = -1000$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-10) = 0-10 = -10$

Dus $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1000}{e^x-10} = \dfrac{-1000}{-10} = 100$ dus H.A.: $y = 100$ [2p]

Dus punt $A(0, 100)$

Punt C berekenen met: $\dfrac{e^{2x}-1000}{e^x-10} = 100$ dus $e^{2x} - 1000 = 100\cdot(e^x - 10)$ [1p] dus

$e^{2x} = 100\cdot e^x$ dus $\dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x = 100$, dus punt $C(\ln(100), 100)$ [2p]

$B(\ln(10), 100)$, $A(0, 100)$ en $C(\ln(100), 100)$

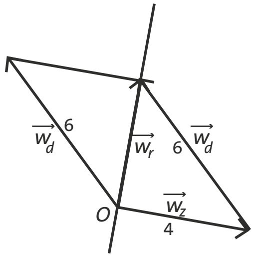
Dus midden van A en C is $\left(\dfrac{\ln(100)}{2}, 100\right) = \left(\dfrac{1}{2}\cdot\ln(100), 100\right) = \left(\ln(100^{\frac{1}{2}}), 100\right) = (\ln(10), 100)$

Conclusie: het midden van A en C is B. [1p]

**Opmerking: een andere manier om de horizontale asymptoot te bepalen is: als x onbegrensd afneemt, dan naderen e^{2x} en e^x naar 0. De horizontale asymptoot van f(x) heeft dan als vergelijking $y = \dfrac{0-1000}{0-10} = \dfrac{-1000}{-10} = 100$ dus H.A.: $y = 100$.*

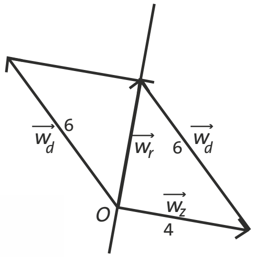
Wind aan zee

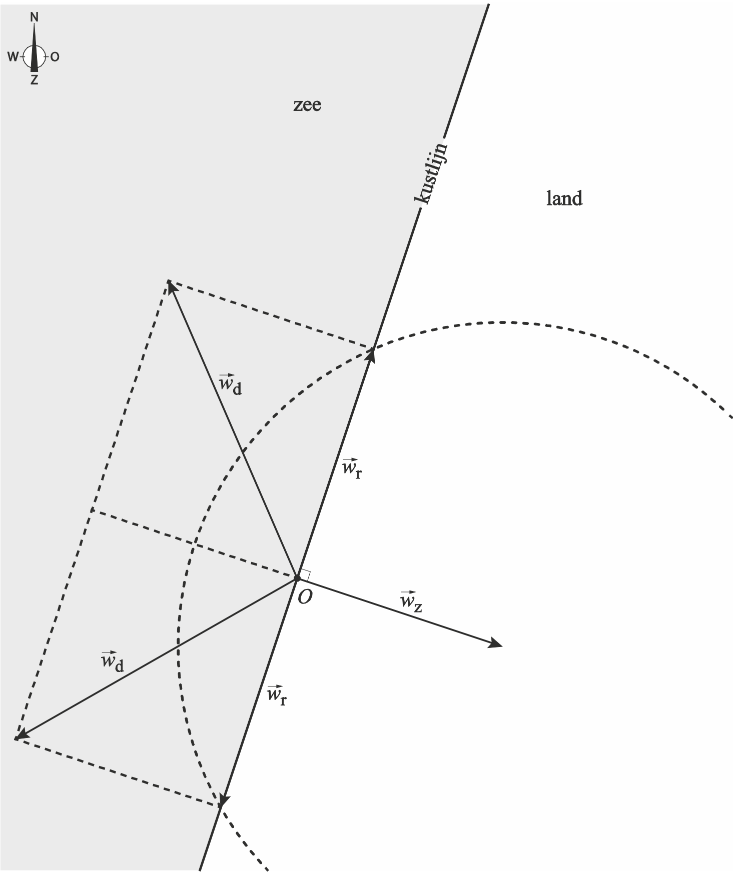
4p **11** *Analyse: van $\vec{w}_z$ zijn lengte en richting bekend, van $\vec{w}_d$ is alleen de lengte bekend en van $\vec{w}_r$ is alleen de richting bekend.*
$\vec{w}_d$ start in O en het eindpunt P ligt op de cirkel 'in de zee' met straal 6. Er moet gelden $\vec{w}_z + \vec{w}_d = \vec{w}_r$ (zie de schets).



eerste methode, met behulp van vectoren:
Vector $\vec{w}_z$ met lengte 4 en richting loodrecht op kustlijn is bekend, zie de uitwerkbijlage.
$\vec{w}_d$ heeft lengte 6, dus teken de cirkel met straal 6 en middelpunt op het eindpunt van $\vec{w}_z$. [2p]
Aangezien $\vec{w}_r$ evenwijdig aan de kustlijn loopt, start $\vec{w}_r$ in O en eindigt $\vec{w}_r$ in het snijpunt van de cirkel met de kustlijn [1p] *(twee oplossingen, ga na in gegeven figuur).*
Aangezien $\vec{w}_z + \vec{w}_d = \vec{w}_r$ is $\vec{w}_d$ de vector die start bij het eindpunt van $\vec{w}_z$ en eindigt in het eindpunt van $\vec{w}_r$ *(twee oplossingen, ga na in gegeven figuur).*
De twee gevraagde vectoren $\vec{w}_d$ starten in O. Teken $\vec{w}_d = \vec{w}_r - \vec{w}_z$. [1p]

tweede methode, met behulp van de stelling van Pythagoras:
$\vec{w}_z \perp \vec{w}_r$ en $\vec{w}_z + \vec{w}_d = \vec{w}_r$ dus $|\vec{w}_z|^2 + |\vec{w}_r|^2 = |\vec{w}_d|^2$ [1p] dus
$4^2 + |\vec{w}_r|^2 = 6^2$ dus $|\vec{w}_r| = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} \approx 4{,}4\ldots$ [1p]
Teken de eindpunten van $\vec{w}_r$ op de kustlijn op afstand 4,4 van O. [1p] Teken $\vec{w}_d = \vec{w}_r - \vec{w}_z$. [1p]





5p **12** *Bereken algebraïsch, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik van decimale breuken is toegestaan.*
eerste methode, met behulp van vectoren:
Analyse: de hoeken van $\vec{w}_z$ en $\vec{w}_d$ met de positieve x-as zijn bekend, dus $\vec{w}_z$ en $\vec{w}_d$ kunnen opgesteld worden.
De snelheid van $\vec{w}_z$ is 3 m/s en $\vec{w}_z$ staat loodrecht op de kustlijn, dus de hoek met de positieve x-as is –30° [1p], dus

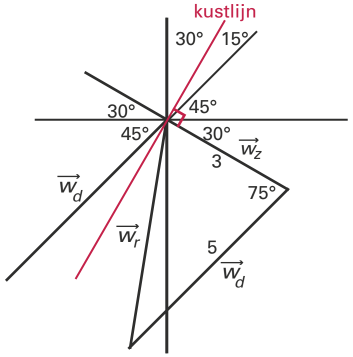
$$\vec{w}_z = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(-30°) \\ 3 \cdot \sin(-30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}59\ldots \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \text{ [1p]}$$

De snelheid van $\vec{w}_d$ is 5 m/s en $\vec{w}_d$ gaat in zuidwestelijke richting, dus de hoek met de positieve x-as is –135°, dus $\vec{w}_d = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(-135°) \\ 5 \cdot \sin(-135°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}53\ldots \\ -3{,}53\ldots \end{pmatrix}$ [1p]

Aangezien $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$ geldt $\vec{w}_r = \begin{pmatrix} -0{,}93\ldots \\ -5{,}03\ldots \end{pmatrix}$ [1p]

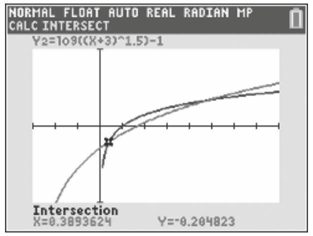
Voor de snelheid geldt dus: $|\vec{w}_r| = \sqrt{(-0{,}93\ldots)^2 + (-5{,}03\ldots)^2} \approx 5{,}1$
Conclusie: de gevraagde snelheid is 5,1. [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

tweede methode, met behulp van cosinusregel:
Analyse: bekijk de driehoek waarbij $\vec{w}_d$ aangrijpt op het eindpunt van $\vec{w}_z$. [1p]
De hoek tussen zijde $\vec{w}_d$ met lengte 5 en zijde $\vec{w}_z$ met lengte 3 is 75° [2p]
(ga dit na in de figuur, denk aan loodrecht, overstaande hoeken en F-hoek).
Cosinusregel geeft
$|\vec{w}_r|^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(75°)$. [1p]
Conclusie: de gevraagde snelheid is 5,1. [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen.

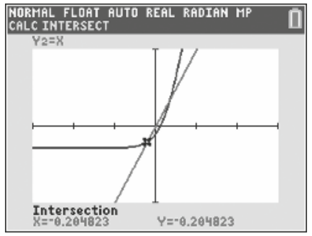


Twee logaritmische functies

4p **13** *Bereken in twee decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.*
eerste methode, $x_A = a$ en druk x_B ook uit in a:
Analyse: de x-coördinaat van punt A noemen we a, en de x-coördinaat van B noemen we b, en B ligt 3 rechts van A. Dan geldt a + 3 = b. Door A en B gaat de horizontale lijn y = q, dus moet gelden f(a) = g(a + 3) = q.
$f(a) = g(a+3) = q$ [1p], dus
$\log(\sqrt{a}) = \log((a+3)\sqrt{(a+3)}) - 1 = q$ [1p]
oplossen met grafische rekenmachine.
$y_1 = \log(\sqrt{x})$
$y_2 = \log((x+3)\sqrt{(x+3)}) - 1$ en calc intersect [1p]
levert $x = 0{,}389\ldots$ en $y = -0{,}204\ldots$ en $x = 4{,}864\ldots$ en $y = 0{,}343\ldots$
(twee oplossingen, ga na in gegeven figuur)
Conclusie: de gevraagde waarden van q zijn –0,20 en 0,34. [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen. Let op de haakjes in het functievoorschrift van g(a + 3). Let op het goede gebruik van haakjes: de –1 in de functie van g(x) hoort niet bij de logaritme. Noteer altijd ook de vergelijking die opgelost moet worden. Het is niet nodig de vergelijking eerst te vereenvoudigen of deels zelf op te lossen voordat hij ingevoerd wordt in de rekenmachine.

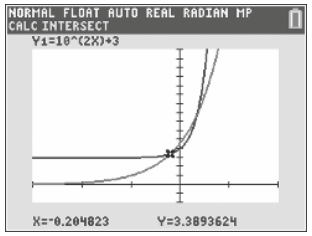


tweede methode, $f(x_A) = q$ en druk x_B ook uit in q:
Analyse: de x-coördinaat van punt A uitdrukken in q.
Hiermee de x-coördinaat van punt B uitdrukken in q.
Er moet gelden $g(x_B) = q$.
De lijn $y = q$ snijdt f in punt A: $f(x_A) = \log(\sqrt{x_A}) = q$
dus $\sqrt{x_A} = 10^q$ dus $x_A = (10^q)^2 = 10^{2q}$
De lengte van het lijnstuk tussen x_A en x_B is 3, dus
geldt $x_B = (10^q)^2 + 3 = 10^{2q} + 3$. [1p]
$g(x_B) = g(10^{2q} + 3) = \log((10^{2q}+3)\sqrt{(10^{2q}+3)}) - 1$



De lijn $y = q$ snijdt de grafiek van g in punt B. Dus vergelijking
$\log((10^{2q}+3)\sqrt{(10^{2q}+3)}) - 1 = q$ [1p] oplossen, met de grafische rekenmachine.
$y_1 = \log((10^{2x}+3)\sqrt{(10^{2x}+3)}) - 1$
$y_2 = x$ en calc intersect [1p]
levert $x = -0{,}204...$ en $y = -0{,}204...$ en $y = 0{,}343...$ en $y = 0{,}343...$
(twee oplossingen, ga na in gegeven figuur. Let op: q wordt in de rekenmachine ingevoerd als een x.)
Conclusie: de gevraagde waarden van q zijn $-0{,}20$ en $0{,}34$. [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen. Let op de haakjes in het functievoorschrift van $g(10^{2q}+3)$. Let op het goede gebruik van haakjes: de -1 in de functie van g(x) hoort niet bij de logaritme. Noteer altijd ook de vergelijking die opgelost moet worden. Het is niet nodig de vergelijking eerst te vereenvoudigen of deels zelf op te lossen voordat hij ingevoerd wordt in de rekenmachine.

derde methode, $f(x_A) = q$ en $f(x_B) = q$:
Analyse: $f(x_A) = q$ en $f(x_B) = q$. Hiermee x_A en x_B uitdrukken in q. B ligt 3 rechts van A. Er moet dus gelden $x_A + 3 = x_B$.
Voor x_A geldt: $\log(\sqrt{x_A}) = q$ dus $\sqrt{x_A} = 10^q$ dus
$x_A = (10^q)^2 = 10^{2q}$
Voor x_B geldt: $\log(x_B\sqrt{x_B}) - 1 = q$ dus $x_B\sqrt{x_B} = 10^{q+1}$
dus $(x_B)^{\frac{3}{2}} = 10^{q+1}$ dus $x_B = (10^{q+1})^{\frac{2}{3}}$ [1p]



De lengte van het lijnstuk tussen x_A en x_B is 3, dus vergelijking $10^{2q} + 3 = (10^{q+1})^{\frac{2}{3}}$ [1p]
oplossen, met grafische rekenmachine.
$y_1 = 10^{2x} + 3$
$y_2 = (10^{x+1})^{\frac{2}{3}}$ en calc intersect [1p]
levert $x = -0{,}204...$ en $y = 3{,}389...$ en $x = 0{,}343...$ en $y = 7{,}864...$
(twee oplossingen, ga na in gegeven figuur. Let op: q wordt in de rekenmachine ingevoerd als een x.)
Conclusie: de gevraagde waarden van q zijn $-0{,}20$ en $0{,}34$. [1p]
Opmerking: let op het aantal decimalen. Noteer altijd ook de vergelijking die opgelost moet worden. Het is niet nodig de vergelijking eerst te vereenvoudigen of deels zelf op te lossen voordat hij ingevoerd wordt in de rekenmachine.

3p **14** *Bewijs, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: CD en CE worden genoemd, dus noteer CD en CE. Er geldt CD = DE – CE. Gebruik rekenregels logaritmen.
eerste methode, maak onder andere gebruik van log(a) – log(b) = log(a : b):
Omdat $CD = DE - CE$ en $DE = g(p) = \ln(p\sqrt{p}) - 1$ en $CE = f(p) = \ln(\sqrt{p})$ geldt
$CD = \log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p})$.

$$\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p})}{\log(\sqrt{p})} \text{ [1p]} = \frac{\log\left(\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\right) - 1}{\log(\sqrt{p})} = \frac{\log(p) - 1}{\log(\sqrt{p})}$$

Omdat $\log(\sqrt{p}) = \log(p^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log(p)$ geldt $\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p)-1}{\log(\sqrt{p})} = \frac{\log(p)-1}{\frac{1}{2}\log(p)}$ [1p]

Conclusie: $\frac{CD}{CE} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$ [1p]
Opmerking: het resultaat van deze opgave kan gebruikt worden bij de volgende opgave.

tweede methode, maak onder andere gebruik van $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$:
Omdat $CD = DE - CE$ en $DE = g(p) = \ln(p\sqrt{p}) - 1$ en $CE = f(p) = \ln(\sqrt{p})$ geldt
$CD = \log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p})$.

$$\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p})}{\log(\sqrt{p})} \text{ [1p]} = \frac{\log(p^{1\frac{1}{2}}) - 1 - \log(p^{\frac{1}{2}})}{\log(p^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{1\frac{1}{2}\log(p) - 1 - \frac{1}{2}\log(p)}{\frac{1}{2}\log(p)} = \frac{\log(p) - 1}{\frac{1}{2}\log(p)} \text{ [1p]}$$

Conclusie: $\frac{CD}{CE} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$ [1p]
Opmerking: het resultaat van deze opgave kan gebruikt worden bij de volgende opgave.

2p **15** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: gebruik resultaat vorige opgave. Herschrijf het gegeven quotiënt.
Gevraagd wordt $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{CD}{CE} = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{CD}{CE} = \lim_{p\to\infty}\frac{2\log(p)-2}{\log(p)} = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{2\log(p)}{\log(p)} - \frac{2}{\log(p)}\right) \text{ [1p]} = \lim_{p\to\infty}\left(2 - \frac{2}{\log(p)}\right) = 2 \text{ [1p]}$$

(*controleer, bijvoorbeeld met een tabel*)
Conclusie: de grenswaarde is 2.

Parabool en cirkel met variabele straal

5p **16** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: genoemd worden de parabool (gegeven), de cirkel (met variabele straal r) en het aantal gemeenschappelijke punten. Stel de vergelijking van de cirkel op en bereken de snijpunten met de parabool.

eerste methode, m.b.v. de discriminant:
Cirkel met middelpunt op de y-as, straal r en door $O(0, 0)$ is $c: x^2 + (y - r)^2 = r^2$ [1p]
Deze cirkel snijden met de parabool $y = x^2$ levert $x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$ [1p]
Oplossen, dus $x^2 + x^4 - 2x^2r + r^2 = r^2$ dus $x^2 + x^4 - 2x^2r = 0$ dus $x^2(1 + x^2 - 2r) = 0$ [1p]
dus $x^2 = 0$ of $1 + x^2 - 2r = 0$ dus $x^2 - 2r + 1 = 0$ [1p]
$x^2 = 0$ heeft één oplossing dus $x^2 - 2r + 1 = 0$ moet twee oplossingen hebben, dus moet gelden $D > 0$
dus $b^2 - 4ac > 0$ met $a = 1$, $b = 0$ en $c = -2r + 1$ dus $8r - 4 > 0$.
Conclusie: $r > \frac{1}{2}$ [1p]

tweede methode, omwerken naar x:
Cirkel met middelpunt op de y-as, straal r en door $O(0, 0)$ is $c: x^2 + (y - r)^2 = r^2$ [1p]
Deze cirkel snijden met de parabool $y = x^2$ levert $x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$ [1p]
Oplossen, dus $x^2 + x^4 - 2x^2r + r^2 = r^2$ dus $x^2 + x^4 - 2x^2r = 0$ dus $x^2(1 + x^2 - 2r) = 0$ dus $x^2 = 0$ of $1 + x^2 - 2r = 0$ [1p]
$x^2 = 0$ heeft één oplossing dus $x^2 = 2r - 1$ moet twee oplossingen hebben
dus $2r - 1 > 0$ [1p]

Conclusie: $r > \frac{1}{2}$ [1p]

derde methode, omwerken naar y:
Cirkel met middelpunt op de y-as, straal r en door $O(0, 0)$ is $c: x^2 + (y - r)^2 = r^2$ [1p]
Deze cirkel snijden met de parabool $y = x^2$ levert $y + (y - r)^2 = r^2$ [1p]
Oplossen, dus $y + y^2 - 2yr + r^2 = r^2$ dus $y + y^2 - 2yr + r^2 = r^2$ dus $y(y - 2r + 1) = 0$ [1p] dus $y = 0$ of $y - 2r + 1 = 0$ [1p]
Dus $y = 0$ en dus $x = 0$ is één oplossing (snijpunt $(0, 0)$).
Als er drie snijpunten zijn, dan moet $y = 2r - 1$ twee snijpunten opleveren.
Deze snijpunten liggen boven de x-as *(zie figuur 2)*. Dit is het geval als $y > 0$ dus als $2r - 1 > 0$.

Conclusie: $r > \frac{1}{2}$ [1p]

5p **17** *Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.*
Analyse: parabool $y = x^2$. Genoemd wordt omwentelingslichaam om y-as, dus gebruik $\int_{y_o}^{y_M} (\pi x^2)\, dy = \ldots$. Druk uit in r.

$O(0, 0)$ en $M(0, r)$ en parabool is $y = x^2$.

Inhoud omwentelingslichaam parabool is de inhoud van V en W samen:

$\int_0^r (\pi x^2)\, dy = \int_0^r (\pi y)\, dy = \left[\frac{1}{2}\pi y^2\right]_0^r = \frac{1}{2}\pi r^2$ [1p]

Inhoud hele bol is $\frac{4}{3}\pi r^3$ (formule is gegeven), dus inhoud$_W$ is $\frac{2}{3}\pi r^3$ [1p] (onderste helft van de bol).

Er moet nu gelden: inhoud$_V$ = inhoud$_{\text{parabool}}$ − inhoud$_W$ = inhoud$_W$ [1p]

dus opgelost moet worden $\frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ [1p]

Dus $3\pi r^2 - 8\pi r^3 = 0$ dus $\pi r^2 \cdot (3 - 8r) = 0$ dus $r = 0$ of $r = \frac{3}{8}$.

Conclusie: $r = \frac{3}{8}$ [1p]

©ThiemeMeulenhoff

Oefenen met het examen van 2021-I.
De antwoorden en uitwerkingen vind je op mijn.examenbundel.nl.

Deel 2b Examen zonder uitwerkingen

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift op www.examenbundel.nl.

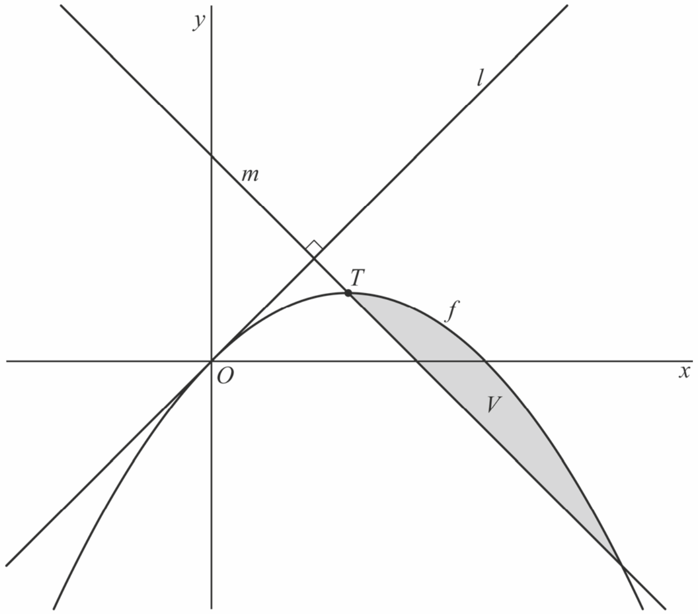
Examen 2021-I

Parabool en twee lijnen

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x - x^2$.

Het punt $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ is de top van de grafiek van f.
De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong.
De lijn m staat loodrecht op lijn l en gaat door T.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn m en de grafiek van f.
Zie de figuur.

figuur



8p **1** Bereken exact de oppervlakte van V.

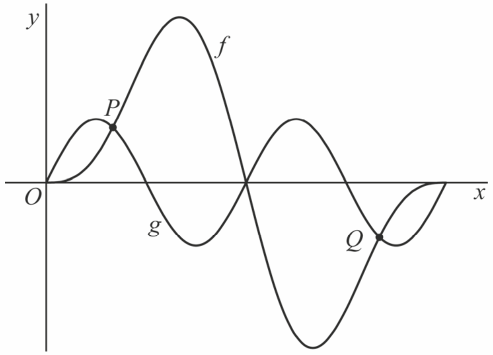
Goniometrische functies

De functies f en g worden voor $0 \le x \le 2\pi$ gegeven door:

$f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$
$g(x) = \sin(2x)$

De grafieken van f en g hebben vijf gemeenschappelijke punten. Drie van deze punten liggen op de x-as. De andere twee punten zijn P en Q.
Zie figuur 1.

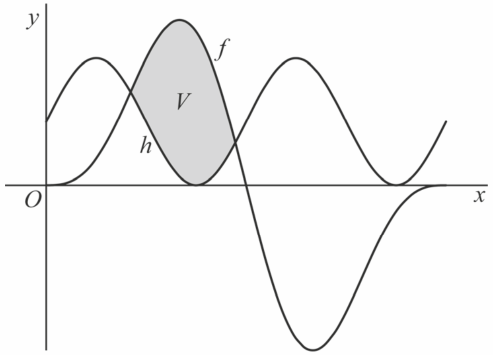
figuur 1



4p **2** Bereken exact de x-coördinaten van P en Q.

De grafiek van g wordt 1 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h. Zie figuur 2.
V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en h. In figuur 2 is dit gebied grijs gemaakt.

figuur 2

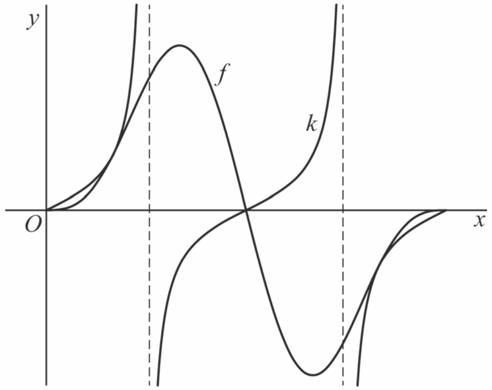


De grafieken van f en h snijden elkaar in twee punten. De x-coördinaten van deze twee punten zijn afgerond 1,33 en 2,97.

5p **3** Bereken de oppervlakte van V met behulp van primitiveren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

De functie k wordt gegeven door $k(x) = \frac{1}{2}\tan(x)$. Zie figuur 3, waarin de grafieken van k en f zijn weergegeven.

figuur 3



De grafiek van k raakt de grafiek van f in een punt met x-coördinaat $\frac{1}{3}\pi$.

4p **4** Bewijs dat voor $x = \frac{1}{3}\pi$ de grafieken van k en f elkaar inderdaad raken.

Aardbevingen

Een aardbeving ontstaat op een plek in de aarde. Het punt recht boven die plek, op het aardoppervlak, heet het **epicentrum** van die aardbeving. We bekijken in deze opgave een model over aardbevingen, waarbij we ervan uitgaan dat de aardbeving in het epicentrum ontstaat.

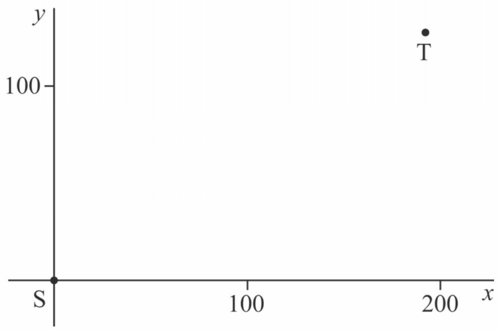
Bij een aardbeving ontstaan verschillende typen golven in de aarde: primaire golven en secundaire golven. Primaire golven zijn sneller dan secundaire golven. We nemen in deze opgave aan dat een primaire golf een constante snelheid van 6 km/s heeft en een secundaire golf een constante snelheid van 3,5 km/s.

Een seismograaf is een meetinstrument waarmee je primaire en secundaire golven van elkaar kunt onderscheiden. Bij een bepaalde aardbeving registreert een seismograaf in een meetstation dat de eerste secundaire golf 17 seconden na de eerste primaire golf bij het meetstation aankomt. Met deze gegevens kun je de afstand d (in km) van de seismograaf tot het epicentrum van de aardbeving bepalen.

4p **5** Bereken deze afstand d.

Om de plaats van het epicentrum te bepalen worden de meetgegevens van verschillende meetstations gecombineerd. In een bepaald gebied staan twee meetstations: S en T. Meetstation T ligt 192 km oostelijker en 128 km noordelijker dan meetstation S.
Uit de metingen in meetstation S volgt dat het epicentrum van de aardbeving op een afstand van 240 km van dit meetstation S ligt.
Uit de metingen in meetstation T volgt dat het epicentrum op 80 km van dit meetstation T ligt.
Op grond van deze gegevens zijn er twee mogelijke plaatsen van het epicentrum aan te wijzen. Om deze plaatsen te bepalen worden de meetstations in een assenstelsel geplaatst, waarbij meetstation S in de oorsprong ligt. De coördinaten van meetstation T zijn dan (192, 128). Zie de figuur.

figuur



6p **6** Bereken algebraïsch de coördinaten van de twee mogelijke plaatsen van het epicentrum in kilometers. Geef de coördinaten in je eindantwoord als gehele getallen.

De zwaarte van een aardbeving wordt uitgedrukt in een getal: de **magnitude**. Een zware aardbeving heeft een grote magnitude, een lichte aardbeving heeft een kleine magnitude. De United States Geological Survey heeft voor verschillende magnitudes onderzocht hoe vaak aardbevingen met die magnitude in een bepaald gebied voorkwamen.
Zie de tabel.

tabel

magnitude	gemiddeld aantal aardbevingen per jaar
6,0 – 6,4	210
6,5 – 6,9	56
7,0 – 7,4	15
7,5 – 7,9	3,1
8,0 – 8,4	1,1
8,5 – 8,9	0,3

De onderzoekers Gutenberg en Richter hebben een model ontwikkeld om het aantal aardbevingen per jaar in een gebied te voorspellen. Dit model is van de vorm:

$$N = 10^{a-bM}$$

Hierin is M de magnitude en N het te verwachten aantal aardbevingen per jaar met deze magnitude M **of groter**. De waarden a en b zijn constanten.

Uit de tabel kun je afleiden dat er gemiddeld 285,5 aardbevingen per jaar zijn met een magnitude van 6,0 of groter. Ook kun je afleiden dat er gemiddeld 4,5 aardbevingen per jaar zijn met een magnitude van 7,5 of groter.
Met behulp van deze twee gegevens is het mogelijk de waarden van a en b uit te rekenen. Vervolgens kun je met dat model een voorspelling doen van het aantal aardbevingen per jaar met een magnitude van 6,5 of groter.

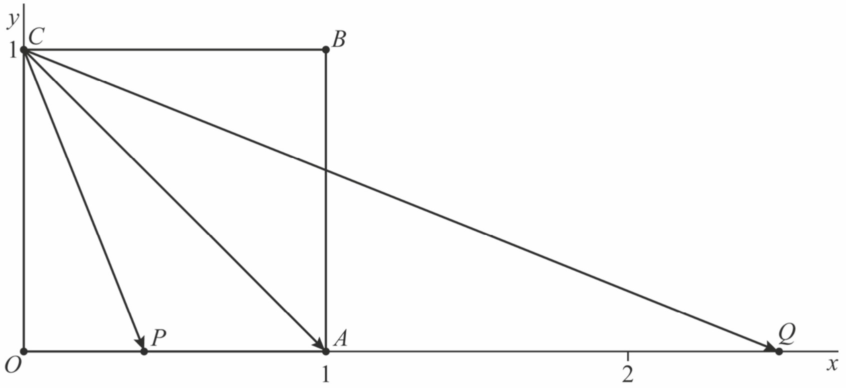
6p **7** Onderzoek hoeveel die voorspelling afwijkt van de gegevens in de tabel. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Een vierkant en vier vectoren

Gegeven is het vierkant $OABC$ met hoekpunten $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ en $C(0, 1)$. Verder zijn gegeven het punt $P(p, 0)$ en het punt $Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)$, met $0 < p < 1$.

In figuur 1 zijn de vectoren $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$ voor een willekeurige waarde van p weergegeven.

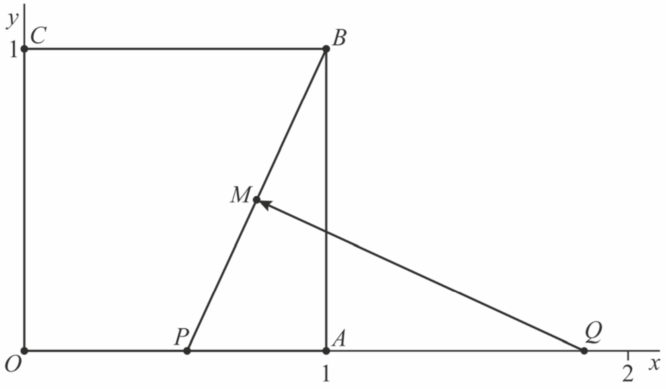
figuur 1



6p **8** Bewijs dat voor elke waarde van p de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ gelijk is aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$.

M is het midden van lijnstuk PB. Zie figuur 2, waarin ook lijnstuk PB en vector $\overrightarrow{QM}$ zijn getekend.

figuur 2



In figuur 2 is p zo gekozen dat vector $\overrightarrow{QM}$ loodrecht staat op lijnstuk PB.

7p **9** Bereken deze waarde van p. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

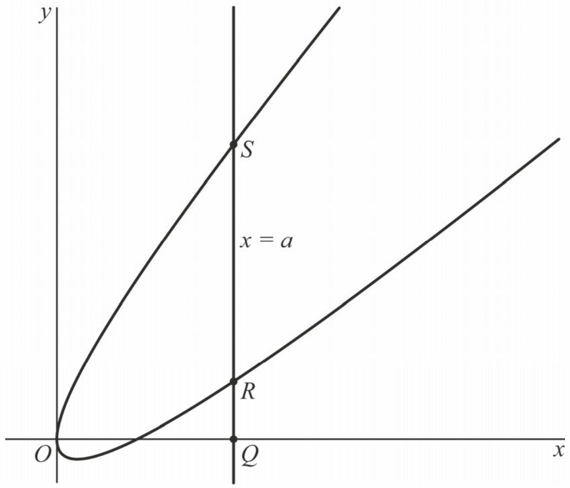
Limiet van een verhouding

De beweging van een punt P wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$

Gegeven is de lijn met vergelijking $x = a$, waarbij $a > 0$.
Deze lijn snijdt de x-as in punt Q en de baan van P in de punten R en S, waarbij de y-coördinaat van S groter is dan de y-coördinaat van R.
Zie de figuur.

figuur



Als a onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding $\frac{QR}{QS}$ tot een limiet.

4p **10** Bereken exact deze limiet.

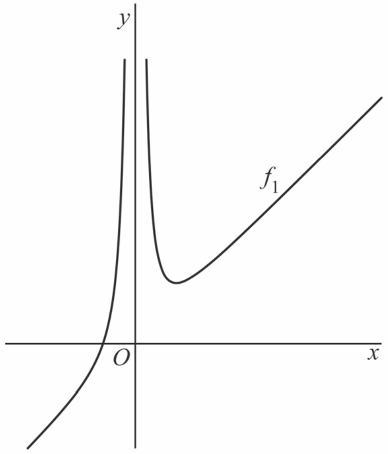
Gebroken functie met een parameter

Voor $p > 0$ wordt de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$$

In de figuur is de grafiek van f_1 weergegeven.

figuur



De grafiek van f_1 heeft een scheve asymptoot.

3p **11** Bewijs dat de grafiek van f_1 boven deze scheve asymptoot ligt.

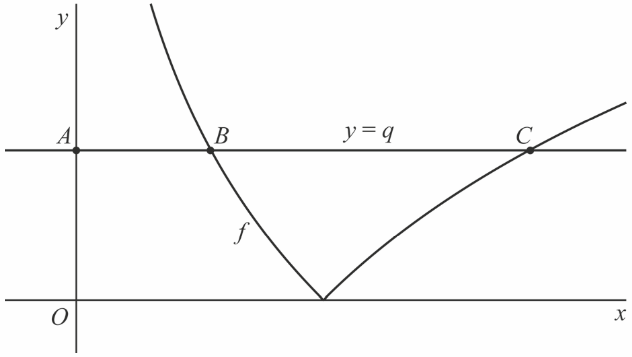
Voor elke waarde van $p > 0$ heeft de grafiek van f_p één top.

5p **12** Bewijs dat er een lijn is waarop al deze toppen liggen.

Absolute natuurlijke logaritme

De functie f wordt gegeven door $f(x) = |\ln(x)|$.
Gegeven is verder de horizontale lijn met vergelijking $y = q$, met $q > 0$.
Deze lijn snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van f in de punten B en C met $x_B < x_C$. Zie de figuur.

figuur



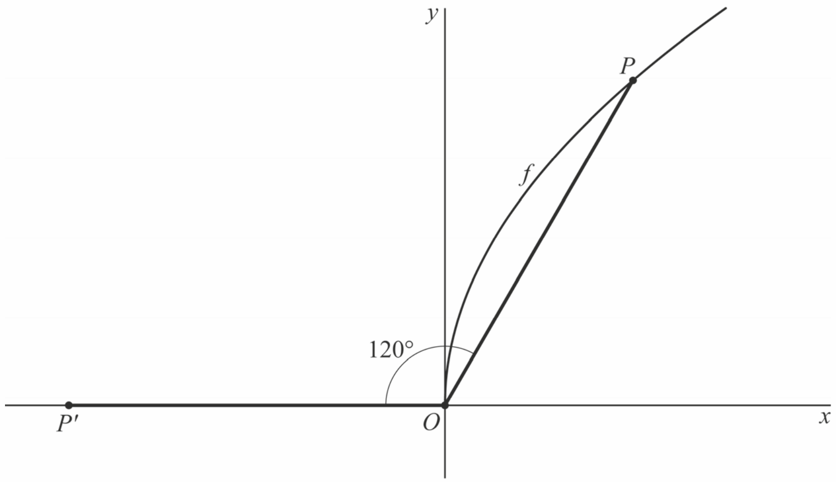
Er is een waarde van q waarvoor de lengte van lijnstuk BC drie keer zo groot is als de lengte van lijnstuk AB.

6p **13** Bereken exact deze waarde van q.

P en P'

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sqrt{x}$.
Het punt P is een punt op de grafiek van f rechts van de y-as.
Zie de figuur.

figuur



In de figuur is het punt P zo gekozen dat er een punt P' bestaat met de volgende eigenschappen:

- P' ligt op de negatieve x-as;
- Lijnstuk OP' heeft dezelfde lengte als lijnstuk OP ;
- $\angle POP' = 120°$.

6p **14** Bereken exact de x-coördinaat van P' .

Bijlagen

Cijferbepaling

2016-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,6
1	1,2	47	7,8
2	1,5	48	7,9
3	1,7	49	8,0
4	1,9	50	8,1
5	2,1	51	8,2
6	2,4	52	8,3
7	2,6	53	8,4
8	2,8	54	8,6
9	3,1	55	8,6
10	3,3	56	8,7
11	3,5	57	8,7
12	3,7	58	8,8
13	3,9	59	8,9
14	4,0	60	8,9
15	4,1	61	9,0
16	4,2	62	9,0
17	4,3	63	9,1
18	4,5	64	9,1
19	4,6	65	9,2
20	4,7	66	9,3
21	4,8	67	9,3
22	4,9	68	9,4
23	5,0	69	9,4
24	5,1	70	9,5
25	5,2	71	9,5
26	5,4	72	9,6
27	5,5	73	9,7
28	5,6	74	9,7
29	5,7	75	9,8
30	5,8	76	9,8
31	5,9	77	9,9
32	6,0	78	9,9
33	6,2	79	10,0
34	6,3		
35	6,4		
36	6,5		
37	6,6		
38	6,7		
39	6,8		
40	7,0		
41	7,1		
42	7,2		
43	7,3		
44	7,4		
45	7,5		

2016-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,5
1	1,2	47	7,6
2	1,4	48	7,7
3	1,7	49	7,8
4	1,9	50	8,0
5	2,1	51	8,1
6	2,3	52	8,2
7	2,6	53	8,3
8	2,8	54	8,4
9	3,0	55	8,5
10	3,2	56	8,6
11	3,4	57	8,7
12	3,7	58	8,7
13	3,8	59	8,8
14	4,0	60	8,8
15	4,1	61	8,9
16	4,2	62	8,9
17	4,3	63	9,0
18	4,4	64	9,1
19	4,5	65	9,1
20	4,6	66	9,2
21	4,7	67	9,2
22	4,8	68	9,3
23	5,0	69	9,3
24	5,1	70	9,4
25	5,2	71	9,4
26	5,3	72	9,5
27	5,4	73	9,6
28	5,5	74	9,6
29	5,6	75	9,7
30	5,7	76	9,7
31	5,8	77	9,8
32	6,0	78	9,8
33	6,1	79	9,9
34	6,2	80	9,9
35	6,3	81	10,0
36	6,4		
37	6,5		
38	6,6		
39	6,7		
40	6,8		
41	7,0		
42	7,1		
43	7,2		
44	7,3		
45	7,4		

2017-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,7
1	1,3	47	7,9
2	1,5	48	8,0
3	1,8	49	8,1
4	2,0	50	8,2
5	2,3	51	8,4
6	2,5	52	8,5
7	2,8	53	8,6
8	2,9	54	8,7
9	3,0	55	8,9
10	3,2	56	9,0
11	3,3	57	9,1
12	3,4	58	9,2
13	3,5	59	9,2
14	3,7	60	9,3
15	3,8	61	9,4
16	3,9	62	9,4
17	4,1	63	9,5
18	4,2	64	9,6
19	4,3	65	9,6
20	4,4	66	9,7
21	4,6	67	9,7
22	4,7	68	9,8
23	4,8	69	9,9
24	4,9	70	9,9
25	5,1	71	10,0
26	5,2		
27	5,3		
28	5,4		
29	5,6		
30	5,7		
31	5,8		
32	6,0		
33	6,1		
34	6,2		
35	6,3		
36	6,5		
37	6,6		
38	6,7		
39	6,8		
40	7,0		
41	7,1		
42	7,2		
43	7,4		
44	7,5		
45	7,6		

2017-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,5
1	1,2	47	7,6
2	1,5	48	7,7
3	1,7	49	7,9
4	2,0	50	8,0
5	2,2	51	8,1
6	2,5	52	8,2
7	2,7	53	8,3
8	2,9	54	8,5
9	3,0	55	8,6
10	3,1	56	8,7
11	3,2	57	8,8
12	3,4	58	9,0
13	3,5	59	9,1
14	3,6	60	9,1
15	3,7	61	9,2
16	3,8	62	9,3
17	4,0	63	9,3
18	4,1	64	9,4
19	4,2	65	9,5
20	4,3	66	9,5
21	4,5	67	9,6
22	4,6	68	9,6
23	4,7	69	9,7
24	4,8	70	9,8
25	4,9	71	9,8
26	5,1	72	9,9
27	5,2	73	9,9
28	5,3	74	10,0
29	5,4		
30	5,5		
31	5,7		
32	5,8		
33	5,9		
34	6,0		
35	6,2		
36	6,3		
37	6,4		
38	6,5		
39	6,6		
40	6,8		
41	6,9		
42	7,0		
43	7,1		
44	7,3		
45	7,4		

Bedenk dat het toekennen van punten aan een antwoord enige deskundigheid vereist. De hier behaalde scores zijn dus vooral een indicatie van hoeveel je op dit moment weet over het vak.

2018-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	6,6
1	1,1	47	6,7
2	1,1	48	6,8
3	1,3	49	6,9
4	1,4	50	7,1
5	1,5	51	7,2
6	1,6	52	7,3
7	1,8	53	7,4
8	1,9	54	7,6
9	2,0	55	7,7
10	2,1	56	7,8
11	2,3	57	7,9
12	2,4	58	8,1
13	2,5	59	8,2
14	2,6	60	8,3
15	2,7	61	8,4
16	2,9	62	8,5
17	3,0	63	8,7
18	3,1	64	8,8
19	3,2	65	8,9
20	3,4	66	9,0
21	3,5	67	9,2
22	3,6	68	9,3
23	3,7	69	9,4
24	3,9	70	9,5
25	4,0	71	9,7
26	4,1	72	9,8
27	4,2	73	10,0
28	4,4		
29	4,5		
30	4,6		
31	4,7		
32	4,8		
33	5,0		
34	5,1		
35	5,2		
36	5,3		
37	5,5		
38	5,6		
39	5,7		
40	5,8		
41	6,0		
42	6,1		
43	6,2		
44	6,3		
45	6,4		

2018-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,2
1	1,2	47	7,3
2	1,5	48	7,4
3	1,7	49	7,5
4	1,9	50	7,6
5	2,2	51	7,8
6	2,4	52	7,9
7	2,6	53	8,0
8	2,7	54	8,1
9	2,9	55	8,2
10	3,0	56	8,3
11	3,1	57	8,5
12	3,2	58	8,6
13	3,3	59	8,7
14	3,4	60	8,8
15	3,6	61	8,9
16	3,7	62	9,0
17	3,8	63	9,2
18	3,9	64	9,2
19	4,0	65	9,3
20	4,1	66	9,4
21	4,3	67	9,4
22	4,4	68	9,5
23	4,5	69	9,5
24	4,6	70	9,6
25	4,7	71	9,6
26	4,8	72	9,7
27	5,0	73	9,8
28	5,1	74	9,8
29	5,2	75	9,9
30	5,3	76	9,9
31	5,4	77	10,0
32	5,5		
33	5,7		
34	5,8		
35	5,9		
36	6,0		
37	6,1		
38	6,2		
39	6,4		
40	6,5		
41	6,6		
42	6,7		
43	6,8		
44	6,9		
45	7,1		

2019-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,0
1	1,2	47	7,1
2	1,5	48	7,2
3	1,7	49	7,3
4	1,9	50	7,4
5	2,1	51	7,5
6	2,4	52	7,7
7	2,6	53	7,8
8	2,7	54	7,9
9	2,8	55	8,0
10	2,9	56	8,1
11	3,0	57	8,2
12	3,2	58	8,3
13	3,3	59	8,4
14	3,4	60	8,6
15	3,5	61	8,7
16	3,6	62	8,8
17	3,7	63	8,9
18	3,8	64	9,0
19	3,9	65	9,1
20	4,1	66	9,2
21	4,2	67	9,3
22	4,3	68	9,3
23	4,4	69	9,4
24	4,5	70	9,4
25	4,6	71	9,5
26	4,7	72	9,6
27	4,8	73	9,6
28	5,0	74	9,7
29	5,1	75	9,7
30	5,2	76	9,8
31	5,3	77	9,8
32	5,4	78	9,9
33	5,5	79	9,9
34	5,6	80	10,0
35	5,7		
36	5,9		
37	6,0		
38	6,1		
39	6,2		
40	6,3		
41	6,4		
42	6,5		
43	6,6		
44	6,8		
45	6,9		

2019-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,6
1	1,2	47	7,8
2	1,5	48	7,9
3	1,7	49	8,0
4	1,9	50	8,1
5	2,2	51	8,2
6	2,4	52	8,4
7	2,7	53	8,5
8	2,9	54	8,6
9	3,1	55	8,7
10	3,4	56	8,8
11	3,5	57	8,9
12	3,6	58	8,9
13	3,7	59	9,0
14	3,9	60	9,1
15	4,0	61	9,1
16	4,1	62	9,2
17	4,2	63	9,2
18	4,3	64	9,3
19	4,5	65	9,3
20	4,6	66	9,4
21	4,7	67	9,5
22	4,8	68	9,5
23	4,9	69	9,6
24	5,0	70	9,6
25	5,2	71	9,7
26	5,3	72	9,8
27	5,4	73	9,8
28	5,5	74	9,9
29	5,6	75	9,9
30	5,8	76	10,0
31	5,9		
32	6,0		
33	6,1		
34	6,2		
35	6,3		
36	6,5		
37	6,6		
38	6,7		
39	6,8		
40	6,9		
41	7,1		
42	7,2		
43	7,3		
44	7,4		
45	7,5		

©ThiemeMeulenhoff
©ThiemeMeulenhoff

Onderwerpregister

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
a		
afgeleide	zie differentiëren	
afstand	h2 **1 2 16 29 34 36**	2016-II **9**
	h2 **39 40** h3 **28**	2019-II **13 14**
	h4 **14 30**	
	h5 **11 17**	
afstand punt-lijn		2016-II **16**
algebraïsche vaardigheden	h1 h2 **42**	2017-I **8** 2017-II **8 13 14**
	h5 **13 14 16 22**	2018-II **3**
asymptoot		
horizontale-	h2 **22** h3 **8**	2019-II **10**
scheve-		2017-II **5**
verticale -	h2 **19** h3 **8**	2017-I **9 11** 2019-II **10**
b		
bewegingsformules	zie ook parameterkromme	
bewijs	zie ook formule bewijzen/ herleiden/maken	
buigpunt	h2 **40**	
c		
cirkel	h5 **13 14 22 25 26**	2016-I **6 7 8 10** 2016-II **6 7**
		2017-I **3 - 5** 2017-II **6 7**
		2018-I **6 7** 2018-II **8 15 16**
congruente driehoeken h5 14		
cosinusregel	h5 **18 - 21**	2016-I **16**
		2017-I **3** 2018-I **16**
		2019-II **12**
d		
differentiëren	h1 **39 41**	2016-I **12**
	h2 **2 4 8 14 27**	2016-II **14** 2017-I **6 12**
	h2 **28 35** h3 **1 17**	2017-II **1 16**
	h4 **2 7**	2018-I **1** 2018-II **2**
		2019-I **2 8** 2019-II **3 4 7**
kettingregel	h3 **6 7 10 17 29 34**	2016-I **1 5 9** 2016-II **11**
	h3 **38 45**	2017-I **6 12** 2017-II **1 4 16**
	h4 **13 15 16 20 23**	2018-I **3 13** 2018-II **7**
	h4 **26**	2019-I **2** 2019-II **3**
productregel	h3 **29** h4 **7**	2018-I **3**
		2018-II **7** 2019-I **8**
quotientregel	h3 **9 13 26 27**	2016-I **8**
	h4 **25**	2016-II **4** 2017-II **15**
		2018-II **2** 2019-II **7**
differentiequotient		2017-I **8**
driehoek	h5 **9 10 24**	2016-II **3 5 6 7** 2019-I **14**
oppervlakte		2016-I **16** 2017-I **3 5**
		2017-II **14**
dubbele afgeleide	zie buigpunt	

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
e		
evenwijdig	h5 **12**	
exponentieel verband	h5 **31 32**	
extreme waarde	zie top berekenen	
f		
F-hoeken	zie hoek	
formule bewijzen/herleiden/maken		
exponenten en logaritmen		
	h1 **5 8 – 12 25 - 29**	2017-II **11**
	h1 **34**	2018-I **11**
	h3 **2 19 33 42 44**	2018-II **6 7** 2019-II **14**
gebroken	h1 **2 3 15 22 24 32**	2016-I **13 14 15**
	h1 **37**	2018-I **15** 2018-II **1**
		2019-II **14**
goniometrie	h4 **5 18 19 21**	2016-I **3 4**
	h4 **34 36**	2016-II **13** 2017-I **7 8**
		2017-II **10 13** 2018-I **16 17**
		2019-II **8**
herschrijven	h1 **1 - 15 22 - 34 37**	2016-II **6 7**
		2017-II **11 13 14** 2019-II **6**
macht	h1 **23** h5 **25**	
meerdere variabelen		2017-II **8 9**
		2018-II **3 – 5** 2019-II **5 6**
wortels	h1 **6 7 13 30 31 33**	2017-II **8 9**
	h2 **42**	2018-II **1** 2019-I **15**
functies		
absoluut-	h2 **11 22**	2017-II **4 5** 2019-II **4**
exponentiële-	h3 **3 - 7 12 - 19**	2016-I **1 2** 2017-I **12 14**
	h3 **22 - 25 29 - 45**	2017-II **1 - 3 11**
		2018-I **3 - 5 10 11 - 13**
		2019-II **10**
gebroken-	h2 **14 - 16 19 - 22**	2016-II **3 4 5**
	h2 **23 - 26 34 35**	2017-I **9 - 11 15**
		2017-II **15** 2018-II **1 2**
		2019-II **10**
goniometrische-	h4	2016-I **3 4 5**
		2016-II **8 12 13 14**
		2018-I **8 9** 2019-I **2 10 – 12**
		2019-II **8 9**
logaritmische-	h3 **1 2 7 - 12**	2016-II **9 10 11**
	h3 **20 21 26 - 28**	2017-I **1 12 -14**
		2017-II **11 12** 2018-I **14**
		2019-I **8 9** 2019-II **13 - 15**
machts-	h2 **4 - 6 28 - 30**	2016-II **1 2** 2017-I **1**
	h2 **38 - 40**	2018-II **11** 2019-II **1**
wortel-	h2 **1 - 3 7 - 9**	2016-I **11 12**
	h2 **8 9 12 13 17 18**	2016-II **1 2** 2017-II **9**
	h2 **31 - 33 36 37**	2019-I **3 - 5**
	h2 **41 - 43**	

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
g		
gebroken functies	zie functies en herschrijven	
gelijkbenige driehoek	h4 **31** h5 **21 24**	2017-II **7** 2019-I **14**
gelijkvormigheid	h5 **17**	2018-II **10**
gelijkzijdige driehoek		
goniometrie	zie functies en formules	
h		
haakjes wegwerken	zie algebraïsche vaardigheden	
halveringstijd		
helling	zie raaklijn	
herleiden	zie ook formule bewijzen/herleiden/maken	
herschrijven	zie ook formule bewijzen/herleiden/maken	
hoek berekenen tussen ...		2017-II **4**
	h5 **6 8 11**	2019-II **3**
hoek (F- en Z-hoek)	h5 **17**	2019-II **12**
i		
inhoud	h2 **13 33 36 43 46**	2016-I **11**
	h3 **11**	2016-II **10** 2017-I **10**
		2017-II **9** 2018-II **4**
		2019-I **15** 2019-II **17**
inproduct	h5 **6 8 10 23**	2017-I **2** 2017-II **3**
		2018-II **16** 2019-I **12**
		2019-II **2 3**
integreren	h2 **5 7 - 9 13 15 17**	2016-I **11** 2016-II **10**
	h2 **20 21 26 30 33**	2017-I **10** 2017-II **2**
	h2 **36 38 41 43 - 46**	2018-I **4 5** 2018-II **4 11**
	h2 **48**	2019-I **5 9**
	h3 **11 12 17 18**	2019-II **8 17**
	h3 **23 25 30**	
	h4 **3 24 25 35**	
inverse functie	h2 **3** h3 **20**	2016-I **13** 2016-II **1**
		2017-I **11** 2018-I **12**
k		
keerpunt	h4 **20**	
kettingregel	zie differentiëren	
knikpunt		2019-II **4**
kwadraat afsplitsen	h1 **35 36**	
l		
lengte	zie ook afstand	
limiet	h1 **43** h2 **20 - 22**	2016-I **15**
	h3 **8 32**	2017-I **4 15** 2017-II **5**
		2019-I **11** 2019-II **4 10 15**
lissajous	zie parameterkromme	
logaritme	zie functies en herschrijven	
loodrecht	h5 **4 5 8 10 11 16**	2016-I **6** 2016-II **11**
	h5 **22 23**	2017-I **2** 2017-II **3 6**
		2018-II **2 16** 2019-I **12 14**

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
m		
machtsfuncties	zie functies en herschrijven	
maximum	zie top berekenen	
meetkunde	**h5**	2018-I **16 17**
		2018-II **8 - 10 15 16**
		2019-II **16 17**
midden	2019-II **10**	
middelloodlijnen	h5 **26**	2016-I **7** 2016-II **15**
		2018-II **8**
minimum	zie top berekenen	
n		
natuurlijke logaritme	zie functies en herschrijven	
o		
omwentelingslichaam	zie inhoud	
ongelijkheid	zie vergelijking	
o		
omtrek	h4 **33**	
oppervlakte	h2 **5 8 9 15 17**	2017-I **14** 2017-II **2**
	h2 **20 21 26 30 32**	2018-I **5**
	h2 **41 48**	2018-II **11** 2019-I **5**
	h3 **12 18 23 25**	2019-II **8 9**
	h3 **30 31**	
	h4 **4 - 6 24 35**	
overstaande hoeken		
p		
parabool	-	2016-I **2**
parameter	zie (extra) variabele	
parameterkromme	h4 **8 - 21 28 - 34**	2016-I **9**
		2017-I **6 - 8** 2017-II **16 17**
		2018-I **1 2** 2018-II **12 – 14**
		2019-I **13 14** 2019-II **2 3**
perforatie	h2 **22** h3 **8**	2016-II **8**
		2017-I **15** 2018-I **14**
		2018-II **2** 2019-I **11**
periode		
primitieve	zie integreren	
productregel		
puntsymmetrie	h3 **15**	2016-I **14**
	h4 **27**	
Pythagoras	h1 **37**	2016-I **3 10**
	h4 **30**	2016-II **3 6 15**
	h5 **11 17 24 25**	2017-I **5** 2018-I **7**
		2018-II **9** 2019-I **6 7 12**
		2019-II **1 11 12**

onderwerp	**deel 1** hoofdstuk **onderdeel**	**deel 2a** examen **onderdeel**
q		
quotiëntregel	zie differentiëren	
r		
raaklijn, raken, helling	h2 **7 9 28 40 47** h3 **1 9 22** h4 **15 16** h5 **26**	2016-II **14** 2017-I **1 8** 2017-II **4 17** 2019-I **3** 2019-II **4**
randpunt		2019-I **4**
rekenregels goniometrie	zie algebraïsche vaardigheden en functies en herschrijven	
richtingscoëfficiënt	h2 **47** h3 **10** h4 **15 16**	2017-II **3** 2019-I **12** 2019-II **3**
s		
sinusregel	h5 **18 - 21**	
snelheid	h2 **12** h4 **13**	2016-I **5 9** 2017-I **6** 2017-II **16** 2018-I **1** 2018-II **14** 2019-II **12**
snijpunten	h5 **7**	2016-II **15** 2018-II **15** 2019-I **1 8**
spiegelen in	h5 **15**	2016-I **13**
y = x	h2 **3**	2016-II **1**
stelsel van vergelijkingen	h5 **1 2**	
t		
tangens		2017-II **14 15 17**
Thales		2017-II **6** 2018-II **8**
toon aan	zie ook formule bewijzen/ herleiden/maken	
top berekenen	h2 **2 4 14 27** h3 **7 26 27 35** h4 **23**	2016-I **1 5 12** 2016-II **5** 2017-I **6 12** 2017-II **15** 2018-I **3 8 13** 2019-II **1** 2019-II **7**
translatie	h2 **11**	2016-II **11** 2017-I **11** 2017-II **3**

onderwerp	**deel 1** hoofdstuk **onderdeel**	**deel 2a** examen **onderdeel**
v		
(extra) variabele	h3 **4 30 41 42**	2019-I **3 11**
vectoren	h5 **1 - 9 16 23**	2016-I **6** 2016-II **15 16** 2017-I **2** 2017-II **3** 2018-I **17** 2018-II **9 10 14 16** 2019-I **1 6 7** 2019-II **11 12**
vergelijkingen maken/oplossen		
cirkel		2017-II **6 7** 2018-II **15**
exponentiële-	h3 **3 - 5 14 16 35** h3 **36 37 39 43**	2019-II **5 10**
gebroken-	h1 **18 42**	2016-I **14** 2017-I **9** 2018-I **15**
goniometrische-	h4 **8 10 14 22 29** h4 **31 32**	2016-I **9 16** 2016-II **3 12** 2017-I **7** 2017-II **13 – 15** 2018-I **9 16** 2018-II **12 13** 2019-I **10** 2019-II **2 9**
lineair-	h5 **9 12 15 16**	2017-I **2** 2017-II **9**
logaritmische-	h3 **28 44**	2017-I **12 13** 2017-II **12** 2019-I **8 9** 2019-II **13**
macht-	h1 **19 20** h2 **37**	2016-II **2** 2017-II **17** 2018-I **2 10** 2019-II **16**
meetkunde	h5 **13 14**	2018-I **7**
parabool	-	2016-I **2**
wortel-	h1 **16 17** h2 **9 18**	2016-II **2** 2019-I **7**
vermenigvuldiging		
horizontaal	h2 **11**	
verticaal		
verschuiven	zie translatie	
verticale asymptoot	zie asymptoot	
w		
wentelen	zie inhoud	
wortelfunctie	zie functies en herleiden	
z		
Z-hoeken	zie hoek	
zwaartepunt	h2 **44 45**	2018-I **6**

Examenwerkwoorden

Algemeen: tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.

	De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van beantwoorden.
Algebraïsch / op algebraïsche wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. **Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid 5/x<x exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid 5/x=x exact wordt opgelost. De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.*
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Afleiden van bijvoorbeeld een formule	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.

©ThiemeMeulenhoff

Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

©ThiemeMeulenhoff

Formules

Goniometrie

$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$

$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$

©ThiemeMeulenhoff

Afrondregels bij het examen wiskunde B

Afronden van tussenantwoorden

a. Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.

b. Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.

Afronden van groeifactoren

c. Als een groeifactor wordt gevraagd, geldt voor het eindantwoord: groeifactoren moeten worden genoteerd in ten minste twee decimalen.

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Colofon

Auteurs
N.C. Keemink
P. Thiel

Vormgeving binnenwerk
Maura van Wermeskerken, Apeldoorn

Opmaak
Crius Group, Hulshout

Redactie
Lineke Pijnappels, Tilburg

Auteur stappenplan
T.H.J. Heutmekers

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs.
Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememéulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 49136 4
Eerste druk, tweede oplage, 2022

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2021

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

examenbundel 〉

vwo **Nederlands**
vwo **Engels**
vwo **Duits**
vwo **Frans**
vwo **Economie**
vwo **Bedrijfseconomie**
vwo **Maatschappijwetenschappen**
vwo **Geschiedenis**
vwo **Aardrijkskunde**
vwo **Wiskunde A**
vwo **Wiskunde B**
vwo **Wiskunde C**
vwo **Scheikunde**
vwo **Biologie**
vwo **Natuurkunde**

samengevat }

vwo **Economie**
vwo **Bedrijfseconomie**
vwo **Maatschappijwetenschappen**
vwo **Geschiedenis**
vwo **Aardrijkskunde**
vwo **Wiskunde A**
vwo **Wiskunde B**
vwo **Wiskunde C**
vwo **Scheikunde**
vwo **Biologie**
vwo **Natuurkunde**
havo/vwo **Nederlands 3F/4F**
havo/vwo **Rekenen 3F**

Tips, tricks en informatie die jou helpen bij het slagen voor je eindexamen vind je op examenbundel.nl! Nog meer kans op slagen? Volg ons ook op social media. #geenexamenstress

examenidioom + examenbundel + samengevat + zeker slagen! = #geenexamenstress

examenidioom

vwo **Engels**
vwo **Duits**
vwo **Frans**

zeker slagen !

voor vmbo, havo én vwo

9 789006 491364